Cap.1. Elemente de teoria mulţimilor

1.1. Noţiuni de logică matematică

„Filozofia matematicii se întrebă astăzi nu ce este matematica, ci ce ar trebui să fie, cum ar trebui construită pentru a se elimina complet acele lucruri admise ca atare, fără teoretizări, pe bază de intuiţie, de bun simţ am zice, şi a se obţine un sistem pur logic. Se pune problema eliminării complete a cuvintelor şi transformării fiecărui text matematic, inclusiv a logicii însăşi, într-o succesiune de simboluri”[1].

În matematică, păstrând această rigoare vom spune că nici o propoziţie nu poate fi în acelaşi timp adevărată şi falsă.

Acest subcapitol vizează în principiu următoarele **obiective operaţionale**:

- ❖ Să se identifice cu uşurinţă dacă un enunţ este sau nu o propoziţie;
- ❖ Să se formuleze enunţuri care sunt propoziţii şi enunţuri care nu sunt propoziţii;
- ❖ Să se formuleze negaţia unei propoziţii date;
- ❖ Să se formuleze conjuncţia a două propoziţii date;
- ❖ Să se formuleze disjuncţia a două propoziţii date;
- ❖ Să se formuleze implicaţia a două propoziţii date;
- ❖ Să se formuleze echivalenţa două propoziţii date;

[1] Eugen Rusu

1.1.1. Propoziţia

Definiţie: *Un enunţ despre care ştim că este adevărat sau fals, însă nu şi una şi alta simultan, se numeşte* ***propoziţie.***

Vom nota propoziţiile cu litere mici ale alfabetului latin, sub forma: $p_1,\ldots,p_n$ sau p,q,r,s,; a,b,c,…

Oricărei propoziţii i se asociază o valoare de adevăr: ea este adevărată şi atunci spunem că are valoarea de adevăr 1, sau este falsă şi atunci spunem că are valoarea de adevăr 0.

Exemple de propoziţii:

„România este ţară membră a Uniunii Europene”

„2 este număr prim”

Primele două propoziţii au valoarea de adevăr 1. Vom specifica că propoziţiile interogative sau exclamative ale limbii nu sunt propoziţii în logică. Totodată definiţiile, nu sunt propoziţii, astfel „un număr întreg de forma 2k+1 se numeşte număr impar” nu este o propoziţie, în timp ce „orice număr impar nu este divizibil cu 2” este o propoziţie.

1.1.2. Operatori logici

Acest subcapitol vizează în principiu următoarele **obiective operaţionale**:

- Să se recunoască formule ale calculului propoziţional şi să se formuleze exemple;
- Să se demonstreze pe baza tablelor de adevăr, echivalenţa a două formule ale calculului propoziţional;

Cu ajutorul operatorilor logici, din una sau două propoziţii date se pot forma noi propoziţii a căror valoare de adevăr depinde numai de valoarea de adevăr a propoziţiilor date. Calculele se vor face în nişte tabele, astfel: în stânga punem valorile de adevăr posibile ale propoziţiilor date iar în dreapta, valoarea de adevăr a propoziţiei nou alcătuite. Cei mai utilizaţi operatori logici sunt: negaţia (¬); conjuncţia (⋀); disjuncţia (⋁); implicaţia (→); echivalenţa (↔).

Negaţia unei propoziţii *p* este propoziţia „non *p*" sau „nu este adevărat că *p*" şi se notează ¬*p*.

Propoziţia ¬*p* este adevărată dacă şi numai dacă propoziţia *p* este falsă. Pentru a urmări valoarea de adevăr a propoziţiei ¬*p* considerăm următorul tabel:

p	¬*p*
1	0
0	1

Exemplu. Propoziţia q="nu este adevărat că 3 divide 9" care coincide cu „3 nu divide 9" este negaţia propoziţiei p="3 divide 9". Propoziţia *p* este adevărată şi propoziţia *q*=¬*p* este adevărată.

Conjuncţia propoziţiilor p şi q este propoziţia „p şi q" care se notează p⋀q. Propoziţia p⋀q este adevărată dacă şi numai dacă ambele propoziţii p şi q sunt adevărate. Tabelul de adevăr al conjuncţiei este deci:

p	*q*	*p*⋀q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemplu. Propoziţia: „5 este număr prim şi 4 este număr impar” este o propoziţie falsă fiind conjuncţia a două propoziţii „5 este număr prim” şi „4 este număr impar”, prima fiind adevărată şi a doua falsă.

Disjuncţia propoziţiilor p şi q este propoziţia „p sau q” care se notează $p \vee q$. Propoziţia $p \vee q$ este falsă dacă şi numai dacă ambele propoziţii p şi q sunt false. Tabelul de adevăr al disjuncţiei este deci:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemplu. Propoziţia: „5 este număr prim sau 4 este număr impar” este o propoziţie adevărată fiind disjuncţia a două propoziţii „5 este număr prim” şi „4 este număr impar”, dintre care una este adevărată.

Implicaţia propoziţiilor p şi q este propoziţia „p implică q” care se notează $p \rightarrow q$, şi se citeşte din „p rezultă q”. Propoziţia $p \rightarrow q$ se întâlneşte şi ca implicaţia de sursă p şi capăt q. Ea este falsă dacă şi numai dacă sursa este o propoziţie adevărată, iar capătul o propoziţie falsă.
Tabelul de adevăr al implicaţiei este deci:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1

0	0	1

Exemplu. Propoziţia: „5 este număr prim atunci 4 este număr impar” este o propoziţie falsă fiind o implicaţie a cărei sursă este o propoziţie adevărată în timp ce capătul este o propoziţie falsă.

Observaţie. Dacă propoziţia $p \rightarrow q$ este adevărată scriem $p \Rightarrow q$ şi spunem că q este o consecinţă logică a lui p.

De exemplu, avem „4 divide 6” $\Rightarrow$”3 este număr prim”, dar nu este adevărat că „2 este număr prim” $\Rightarrow$”3 este număr par”.

Echivalenţa propoziţiilor p şi q este propoziţia „p echivalent cu q” care se notează $p \leftrightarrow q$, şi se citeşte „p dacă şi numai dacă q”. Propoziţia $p \leftrightarrow q$ este o propoziţie adevărată dacă şi numai dacă propoziţiile p şi q au aceeaşi valoare de adevăr. Tabelul de adevăr al echivalenţei este:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemplu. Propoziţia: „$3 \mid 5$ dacă şi numai dacă $7 \mid 8$” este o propoziţie adevărată fiind echivalenţa a două propoziţii false.

Observaţie. Dacă propoziţia $p \leftrightarrow q$ este adevărată scriem $p \Leftrightarrow q$ şi spunem că propoziţiile p şi q sunt echivalente logic.

1.1.3. Predicate

Acest subcapitol are în vedere următoarele **obiective operaţionale**:

- ❖ Să se recunoască şi să se formuleze predicate (unare şi binare);

- Folosind unul sau două predicate date să se determine cu ajutorul negaţiei, conjuncţiei, disjuncţiei, implicaţiei şi echivalenţei alte predicate;
- Să se utilizeze cuantificatorul universal şi cuantificatorul existenţial;
- Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiilor $(\forall x)$ p(x) şi $(\exists x)$ p(x) asociate predicatului unar;
- Să se enunţe reguli de negaţie a propoziţiilor $(\forall x)$ p(x) şi $(\exists x)$ p(x) şi să se aplice aceste reguli pe exemple diverse. (valabil şi pentru predicate binare).

Definiţie: *Un predicat* este un enunţ care depinde de una sau mai multe variabile şi care are proprietatea că pentru anumite valori ale variabilelor devine o propoziţie. Un predicat care depinde de n variabile se numeşte *predicat de ordin n;* pentru n=1, 2, 3 avem predicate unare, binare şi respectiv ternare.

Exemple. Fie predicatul binar p(x,y)=”x divide y”. Pentru x=2 şi y=6 se obţine propoziţia adevărată „2 | 6”, iar pentru x=5 şi y=6 se obtine propoziţia falsă „5 | 6” etc. Să considerăm două predicate unare p(x) şi q(x). Cu ajutorul operatorilor logici putem construi şi alte predicate unare, anume: ¬p(x), p(x) $\wedge$ q(x), p(x) $\vee$ q(x), p(x) →q(x),
p(x) ↔ q(x).

De exemplu, predicatul p(x) $\vee$ q(x) este acel predicat z(x) care, pentru fiecare valoare a variabilei x coincide cu propoziţia p(x) $\vee$ q(x).

Cuantificatorul existential $(\exists)$

Fiind dat predicatul unar p(*x*), unde *x* desemnează un element oarecare din mulţimea E, putem formula enunţul: „exista cel puţin un *x* din E astfel încât p(*x*) să fie adevărată” şi care se scrie cu simboluri: „$(\exists x)$ p(*x*)”.

Deci acest enunţ este *o propoziţie, care este adevarată cand există cel puţin un element* x_0 *din E, astfel încât propoziţia p(*x_0*) este adevarată şi este falsă când nu există nici un element* x_0 *din E astfel încât p(*x_0*) să fie adevarată.*

Exemple:

1. Fie predicatul p(*x*): ”x+2=0”, unde *x* desemnează un numar întreg. Propoziţia „($\exists$x)(x+2=0)” este adevarată deoarece pentru x_0=-2 propoziţia p(-2):”-2+2=0”, este adevaratî.
2. Fie predicatul p(*x*): ”x^2+1=0”, unde *x* desemnează un numar real. Propoziţia „($\exists$x)(x^2+1=0)” este falsă deoarece nu există nici un numar real x_0 astfel încât să avem x_0^2 +1=0.

Cuantificatorul universal ($\forall$)

Fiind dat predicatul unar p(*x*), unde *x* desemnează un element oarecare din mulţimea E, putem formula enunţul:

„oricare ar fi x din E are loc p(*x*)”, şi care se scrie cu simboluri: „($\forall$ *x*) p(*x*)”.

Deci acest enunţ este *o propoziţie care este adevarată dacă pentru orice element* x_0 *din E, p(*x_0*) este adevarată şi este falsă în cazul când există cel puţin un* x_0 *din E pentru care p(*x_0*) este falsă.*

Exemple:

1. Fie predicatul p(*x*): ”x+3=0”, unde *x* desemnează un număr întreg. Propoziţia „($\forall$x)(x+3=0)” este falsă deoarece, de exemplu, pentru x_0=4, propoziţia p(4):”4+3=0” este falsă.

2. Fie predicatul p(x):” x^2+1>0”, unde x desemnează un număr real. Propoziţia „($\forall$ x)(x^2+1>0)” este adevarată deoarece pentru orice număr real x_0 avem „ x_0^2 +1>0” este o propoziţie adevărată.

Regulile de negaţie pentru propoziţiile de tip universal-existenţial asociate predicatelor binare se obţin din regulile de negaţie pentru predicatele unare. De exemplu: $\neg$ (($\forall$ y) ($\exists$ x) p(x,y)) $\Leftrightarrow$ ($\exists$ y)($\neg$ ($\exists$ x) p(x,y)) $\Leftrightarrow$ ($\exists$ y) ($\forall$ x) **)(**$\neg$ p(x,y)).

Definiţie. O formulă a calculului propoziţional se numeşte lege, tautologie sau formulă identic adevărată, dacă orice valoare de adevăr ar avea variabilele propoziţionale care intră în componenţa sa, valoarea de adevăr a propoziţiei obţinute este 1.

Pentru a demonstra că o anumită formulă a calculului propoziţional este o tautologie, atribuim variabilelor propoziţionale care intră în compunerea ei valori de adevăr în toate modurile posibile şi calculăm de fiecare dată, pe baza tabelelor de adevăr ale operatorilor logici, valoarea de adevăr a formulei; dacă de fiecare dată valoarea de adevăr obţinută este 1, înseamnă că formula respectivă este o tautologie.

Astfel avem:

p	$\neg$ p	p $\vee$ $\neg$ p
1	0	1
0	1	1

Cea mai mare parte a definiţiilor din matematică sunt predicate care se construiesc cu ajutorul altor predicate deja definite. Astfel, dacă x şi y sunt numere întregi, predicatul „$x \mid y$” este echivalent prin definiţie cu predicatul $(\exists z)\ (y=zx)$ şi scriem $x \mid y \Leftrightarrow (\exists z)\ (y=zx)$.

Alt exemplu, dacă x şi y sunt numere naturale avem definiţia:

„x este număr prim” $\Leftrightarrow (x>1) \wedge (\forall y)\ (y \mid x \Rightarrow (y=1) \vee (y=x)$.

1.1.4. Exerciţii şi probleme

1. Să se verifice următoarele tautologii:
   - a) $p \leftrightarrow p$ (legea de reflexivitate);
   - b) $p \wedge p \rightarrow p$;
   - c) $p \vee p \rightarrow p$ (legile de idempotenţă);
   - d) $\neg\neg p \leftrightarrow p$ (legea dublei negaţii);
   - e) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$;
   - f) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$;
   - g) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$;
   - h) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$;
   - i) $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$;
   - j) $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$;
   - k) $(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p$;
   - l) $\neg (p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;
   - m) $\neg (p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$;
   - n) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$

Observaţie.

Legile calculului propoziţional şi în special cele date mai sus ca exerciţiu sunt importante deoarece pe baza lor se fac raţionamente logice şi deci demonstraţiile în matematică.

2. Folosind tabele de adevăr, să se verifice:

- $p \vee q \equiv q \vee p$;
- $p \wedge q \equiv q \wedge p$;
- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$;
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$;
- $p \rightarrow \neg q \equiv \neg (p \wedge q)$;
- $\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q$;
- $(p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv p \vee q$;
- $p \vee p \equiv p$;
- $p \wedge p \equiv p$;
- $p \wedge q \equiv \neg p (\neg p \vee \neg q)$;
- $p \vee q \equiv \neg (\neg p \wedge \neg q)$;
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

3. Să se arate că următoarele formule sunt tautologii (sau identic adevărate):

a) $\neg (p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;

b) $\neg (p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$;

c) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$;

d) $(\neg q \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow p$;

e) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$;

f) $((p \rightarrow q) \wedge \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$;

g) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$;

h) $(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$;

i) $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$;

4. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $(\exists x)$ (x+6+x=0) unde x desemnează un număr întreg;

b) $(\exists x)$ (x+5=0) unde x desemnează un număr natural;

c) $(\exists x)$ $(|x+6|+|x-6| =0)$ unde x desemnează un număr întreg;

d) $(\exists x)$ $(|x|+|x| =0)$ unde x desemnează un număr întreg;

e) $(\exists x)$ $(|x+7|+|x-6| =0)$ unde x desemnează un număr întreg;

f) $(\forall x)(x^2+1>0)$ unde x desemnează un număr întreg;

g) $(\forall x)(x^2-1>0)$ unde x desemnează un număr întreg;

h) $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ unde x desemnează un număr întreg;

i) $(\forall x)$ $(\forall y)$ $(x^2$ + y2 $\geq$ 0) unde x ,y desemnează numere întregi;

j) $(\exists x)$ $(\exists y)$ $(x^2$ + y2=0) unde x ,y desemnează numere întregi;

k) $(\exists x)$ $(\exists y)$ (x-y =0) unde x ,y desemnează numere naturale.

5. Să se afle valoarea de adevăr (valoarea logică) a următoarelor propoziţii:

l) $(\exists x \in N)$ (x+1=0);

m) $(\exists x \in N)$ (x3+x=0);

n)$(\forall x \in N)$ (x+2 $\geq$ 0).

6. Fie predicatul p(x): ”36 se divide prin x” unde x desemnează numere naturale. Să se determine valorile de adevăr pentru propoziţiile: p(2), p(3), p(4), p(5), p(6), p(7), p(8).

7. Fie predicatul p(x,y): „x<y” unde x ,y desemnează numere întregi. Să se determine valorile de adevăr pentru propoziţiile: p(1,2), p(4,3), p(-1,3),p(-4,-5), p(34,12), p(-3,-1);

m) Să se determine valorile de adevăr ale propoziţiilor:

$(\forall x)\ (\forall y)\ p(x,y)$, $(\forall x)\ (\exists y)\ p(x,y)$,

$(\forall y)\ (\exists x)\ p(x,y)$, $(\exists x)\ (\exists y)\ p(x,y)$.

1.2. Mulţimi (teorie şi aplicaţii)

Noţiunile de: mulţime şi relaţia de a fi element al unei mulţimi fac parte din categoria acelor obiecte matematice care nu se pot defini (sunt noţiuni primare ale unei teorii matematice).

În limbajul matematic, această noţiune se referă la un ansamblu de obiecte diferite şi precis specificate.

Matematicianul german Georg Cantor, părintele teoriei mulţimilor, vorbea despre mulţime ca fiind „o colecţie de obiecte bine determinate şi distincte, ale intuiţiei sau gândirii noastre, într-un singur tot”.

În acest subcapitol se urmăresc următoarele **obiective operaţionale**:

- Să se dea exemple de mulţimi;
- Să se recunoască dacă două mulţimi finite sunt sau nu egale;
- Să se precizeze dacă o mulţime dată este inclusă într-o mulţime şi să se dea exemple de submulţimi ale mulţimii considerate;
- Să se demonstreze egalitatea a două mulţimi pe baza incluziunii;
- Să se determine elementele mulţimii părţilor unei mulţimi cu n elemente.
- Să se definească operaţiile cu mulţimi în termeni logici;
- Să se efectueze operaţii cu mulţimi;
- Să se cunoască proprietăţile reuniunii şi intersecţiei:comutativitatea, asociativitatea, distributivitatea etc.
- Să se cunoscă formulele lui De Morgan.

1.2.1. Noţiunea de mulţime: element, apartenenţă, proprietăţi

Mulţimile vor fi notate, în general, cu litere mari din alfabetul latin: *A, M, X* etc, iar părţile componente ale acestora vor fi numite e*lemente ale mulţimilor* şi vor fi notate în general cu litere mici din alfabetul latin: *a, m, x* etc.

Cuvântul „element” va însemna fie obiectul a cărui apartenenţă la mulţime se examinează, fie simbolul acelui obiect.

Din punctul de vedere al modului în care este dată o mulţime, distingem două cazuri:

a) Mulţimi date prin evidenţierea unei proprietăţi pe care o au toate elementele mulţimii respective şi pe care o au toate obiectele (elementele):

A=mulţimea copiilor dintr-o sală;

B=mulţimea studenţilor din România;

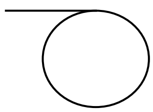
C=mulţimea literelor din alfabetul grec;

D=mulţimea punctelor de pe o dreaptă (o infinitate de punte);

F=mulţimea atomilor din Univers (o infinitate de particule);

G=mulţimea punctelor comune ale unui cerc cu o dreaptă dată, tangentă la acel cerc (un punct);

Fig. 1.1.



H=mulţimea numerelor prime şi pare mai mari strict decât 2;

I=mulţimea punctelor comune a două drepte paralele (nici un punct);

b) *Prin enumerarea elementelor componente* (simbolurile lor fiind scrise într-o acoladă):

M={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, mulţimea cifrelor arabe;

P={0, 2, 4, ..., 398, 400} mulţimea primelor numere pare mai mici ca 400;

T={ a_1, a_2, ..., a_n }, mulţimea formată din n elemente notate cu simbolurile a_1, a_2, ..., a_n.

Observaţii: În scrierea unei mulţimi, elementele fiind distincte, un element se trece o singură dată. Spre exemplu, scrierea {a, b, a} nu este corectă, căci elementul a este trecut de două ori.

- o mulţime poate avea un număr neşfârsit (o infinitate) de elemente (A, B, C, M, P, V, T), un singur element (G) sau nici un element (H, I);
- mulţimea care nu conţine nici un element se numeşte *mulţime vidă* şi se notează „Ø”.

❖ *Relaţia de apartenenţă*

Pentru a stabili relaţii între elemente şi mulţimi introducem un simbol de legătură folosit în teoria mulţimilor.

Dacă „elementul *a* aparţine multimii A”, acesta se scrie: „$a \in A$”.

Dacă „elementul *a* nu aparţine mulţimii A”, acesta se scrie: „$a \notin A$”.

Exemple:

$3 \in M$ $\quad$ $400 \in P$

$50 \notin M$ $\quad$ $1000 \notin P$

Un punct poate să aparţină unei drepte sau să nu aparţină ei. În matematică se utilizează cel mai adesea următoarele mulţimi:

Mulţimi de numere:

- *Mulţimea numerelor naturale:*

  N={0, 1, 2, 3, ..., n, n+1, ...};

- *Mulţimea numerelor naturale fără zero*:

  N*={1, 2, 3, ..., n, ...};

- *Mulţimea numerelor pare:*

$$N_{2k}=\{0, 2, 4, 6, ..., 2k, ...\}=\{2k \mid k\in \boldsymbol{N}\}$$

- *Mulţimea numerelor impare:*

$$N_{2k+1}=\{1, 3, 5, ..., 2k+1, ...\}=\{2k+1 \mid k\in \boldsymbol{N}\}$$

- *Mulţimea numerelor intregi (**Z**):*

$$\boldsymbol{Z}=\{..., -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

- *Mulţimea numerelor raţionale (**Q**):*

$$\boldsymbol{Q}=\left\{\frac{a}{b} / a\in Z, b\in Z, b\neq 0\right\}$$

Definiţie. Numărul raţional este acel număr care se poate scrie sub forma a/b, *a* şi *b* fiind numere întregi, iar *b* diferit de zero (pentru că împărţirea prin zero este imposibilă). *Mulţimea numerelor iraţionale (notată cu **I**=**R****Q**:*

Definiţie. Numim număr iraţional (pozitiv sau negativ) un număr care poate fi reprezentat cu ajutorul unui număr zecimal cu un număr infinit de zecimale, care nu se succed periodic.

Exemple: $\sqrt{2}$=1,4142…; $\sqrt{3}$=1,73...; π=3,1415926…

*Mulţimea numerelor reale (notată cu **R**):*

Definiţie. Prin număr real înţelegem un număr care aparţine fie mulţimii numerelor raţionale, fie mulţimii numerelor iraţionale, deci mulţimea numerelor reale este:

$$\boxed{\boldsymbol{R}=\{x \mid x\in \boldsymbol{Q} \text{ sau } x\in \boldsymbol{I}\}=\boldsymbol{Q}\cup \boldsymbol{I}}$$

Numerele reale pot fi reprezentate pe o dreaptă numită axa numerelor reale, astfel încât fiecarui punct de pe axă îi corespunde un număr real şi reciproc, fiecarui număr real îi corespunde un punct pe axă.

O mulţime de numere reale, ca de exemplu $\{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \le x \le 1\}$ se va mai nota [0,1] şi va fi numită *interval închis* de numere reale; pe acest segment din axa numerelor reale se pot reprezenta o infinitate de numere reale corespunzatoare punctelor segmentului, începand cu zero şi terminand cu 1. Notaţia (0,1) însemnă *interval deschis* şi va cuprinde toate numerele reale dintre 0 şi 1, cu excepţia acestora.

1.2.2.Relaţia de incluziune, egalitate între mulţimi

Relaţia de incluziune

Dacă orice element *x* al unei mulţimi A este şi element al altei mulţimi E, atunci spunem că mulţimea A este o submulţime (sau o parte) a mulţimii E, ceea ce se scrie:

$$\boxed{A \subset E}$$

şi se citeste „mulţimea A este inclusă (conţinută) în mulţimea E”.

Folosind scrierea cu simboluri, dacă A este o submulţime inclusă sau egală cu E, avem:

$$\boxed{A \subseteq E \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in E)}$$

(A inclus în E este echivalent cu oricare ar fi *x* aparţinând lui A, rezultă că *x* aparţine lui E). Dacă propoziţia $A \subseteq E$ nu este adevărată, adică „mulţimea A nu este inclusă în mulţimea A”, scriem $A \not\subset E$, deci

$A \not\subset E \Leftrightarrow \neg (A \subset E \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin E$

Exemple:

- Daca A= {1, 2, 5, 6} şi E={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} atunci avem $A \subset$ E.

1. Referindu-ne la mulţimile de numere ***N, Z, Q, R***, între ele avem relaţiile de incluziune:

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ sau $N_{2k} \subset \mathbf{N}$; $N_{2k+1} \subset \mathbf{N}$; $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$

2. Daca vom considera două intervale de numere reale

A=[3,6] şi B=[2, 9], se observă uşor pe axa numerelor reale că $A \subset B$ (vezi fig. 1.5).

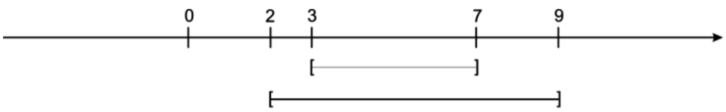


Fig. 1.5

3. Mulţimea literelor care alcatuiesc un cuvânt este o submulţime a mulţimii literelor care alcătuiesc întregul alfabet.

4. Mulţimea studenţilor dintr-un an al unei secţii dintr-o facultate este o submulţime a mulţimii tuturor studenţilor din acea facultate, iar mulţimea studenţilor din acea facultate este o submulţime a mulţimii tuturor studenţilor din acea universitate.

Procedeul de reprezentare a mulţimilor şi a submulţimilor prin puncte interioare unor curbe se numeste „diagrama Euler-Venn”.

Relaţia de incluziune are următoarele proprietăţi:

- ✓ este reflexivă, adică $A \subseteq A$;
- ✓ este antisimetrică, adică dacă $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A=B$;
- ✓ este tranzitivă, adică dacă $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Putem spune că un predicat unar p(x) „defineşte" o mulţime dacă mulţimea A este descrisă de acele elemente x, astfel încât predicatul $x \in A$ să fie echivalent cu predicatul dat p(x): $x \in A \Leftrightarrow p(x)$

Putem scrie deci:

$$\boxed{A=\{x \mid p(x)\}}$$

adică "A este mulţimea acelor elemente x pentru care are loc p(x)". Astfel predicatul $x \neq x$ defineşte o mulţime

$$\emptyset=\{ x \mid x \neq x \}$$

care se numeşte mulţimea vidă sau „mulţimea care nu are nici un element".

Egalitatea mulţimilor

Două mulţimi A şi B sunt egale atunci când sunt formate din aceleaşi elemente.

Aceasta înseamnă că toate elementele mulţimii A aparţin şi mulţimii B ($A \subset B$) şi toate elementele mulţimii B aparţin şi mulţimii A ($B \subset A$), deci vom scrie:

$$\boxed{A=E \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)}$$

Exemple:

1. A={1, 3, 5, 7, 9}

B=Mulţimea primelor numere impare, până la 10.

Evident avem A=B pentru că B={1, 3, 5, 7, 9}.

Două mulţimi egale sunt echivalente, dar două mulţimi echivalente nu sunt neaparat egale.

1.2.3. Operaţii cu mulţimi

Fie două submulţimi A şi B ale aceleaşi mulţimi E, numită mulţime totală sau *mulţime de referinţă*. Cu ajutorul acestora vom defini operaţiile cu mulţimi: *reuniunea*, *intersecţia* şi *diferenţa*.

Precizam că operaţiile cu mulţimi se vor referii atât la mulţimi finite, cât şi la multimi infinite.

Reuniunea mulţimilor

Să considerăm o nouă submulţime a lui E formată din elementele care aparţin cel puţin uneia dintre cele două submulţimi. Submulţimea astfel obţinută se notează cu $A \cup B$ şi se citeşte „mulţimea A reunită cu mulţimea B”, iar operaţia indicată prin semnul „$\cup$” se numeste *reuniune*. Folosind scrierea cu simboluri:

$$\boxed{A \cup E = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$$

Mulţimile A şi B au şi elemente comune. În acest caz *la reuniune luăm toate elementele comune şi necomune celor două mulţimi, fiecare element câte o singură dată.*

2. M={m, n, p}

P={r,s}

M$\cup$P={m, n, p, r, s}

Daca multimile M şi P nu au elemente comune se zice că sunt *disjuncte.*

În acest caz, număul de elemente din mulţimea reuniune este egal cu suma elementelor din mulţmile reunite.

3. X={2, 3, 6, 8, 9}

Y={5, 8, 9}

X$\cup$Y={2, 5, 6, 8, 9}=X

4. Folosind noţiunea de interval (închis sau deschis), ca submulţime de numere reale, avem:

C=[5, 12]

D=[3, 9]

C$\cup$D=[3, 12]

5. V=[1, 4]

S=[6, 11]

V$\cup$S=[1, 4] $\cup$[6, 11]

6. Referindu-ne la mulţimile de numere N_{2k}**,** N_{2k+1}, *Q, I, R* avem: *Q* $\cup$*I*=*R*, N_{2k} $\cup$ N_{2k+1}=***N***

Generalizare:

Evident în cazul în care avem $A_1, A_2, A_3, \; . \; . \; . \; , A_{n-1}, A_n$ mulţimi acestea se pot reuni după aceeaşi regulă ca pentru două mulţmi:

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \; . \; . \; . \cup A_{n-1} \cup A_n$={x $|$ x$\in$ A_1 $\vee$ x$\in$ A_2 ... $\vee$ x$\in$ A_n }

<u>*Intersecţia mulţimilor*</u>

Vom considera o nouă submulţime a lui E formată din elementele care aparţin şi mulţimii A şi mulţimii B. Submulţimea astfel obţinută va fi notată $A \cap B$ şi se va citi „mulţimea A intersectată cu mulţimea B”, iar operaţia indicată prin semnul „$\cap$” va fi numită *intersecţie*. Folosind scrierea cu simboluri:

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$$

Reluăm exemplele de mulţimi cu care am operat la reuniune.

1. $A \cap B=\{1, 2, 5, 6\} \cap \{1, 3, 4, 5, 9\}=\{1, 5\}$

Deci *la intersectie vom lua toate elementele comune celor două mulţimi fiecare câte o singură dată.*

2. $A \cap B=\{m, n, p\} \cap \{r, s\}=\emptyset$

3. $X \cap Y=\{2, 5, 6, 8, 9\} \cap \{5, 8, 9\}=\{5, 8, 9\}=Y$ (fig. 1.14)

4. $C \cap D=[5, 12] \cap [3, 9]=[5, 9]$

5. $V \cap S=[1, 4] \cap [6, 11]= \emptyset$

$Y \subset X \Rightarrow X \cap Y = Y$

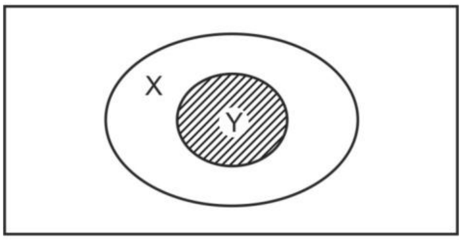


Fig 1.14

6. Referindu-ne la mulţimile remarcabile **Q, I R,** avem :

$\boldsymbol{R \cap Q=Q; R \cap I=I, I \cap Q}=\emptyset$

Generalizare:

Se pot intersecta şi trei sau mai multe mulţimi, după aceeaşi regulă de intersecţie ca pentru două mulţimi:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 ... \cap A_{n-1} \cap A_n$={x | x$\in A_1 \wedge$x$\in A_2 \wedge \in A_n$}

Proprietăţi principale ale reuniunii şi intersecţiei mulţimilor:

- Asociativitatea:

  $\forall$ A, B, C$\subset$E$\Rightarrow$A$\cup$ (B$\cup$C)=(A$\cup$B) $\cup$C,

  A$\cap$ (B$\cap$C)=(A$\cap$B) $\cap$C

- Comutativitatea:

  $\forall$ A, B$\subset$E$\Rightarrow$A$\cup$B=B$\cup$A

  A$\cap$B=B$\cap$A

- Idempotenţa:

  $\forall$ A$\subset$E$\Rightarrow$A$\cup$A=A

  A$\cap$A=A

- Element neutru mulţimea vida:

  $\forall$ A$\subset$E$\Rightarrow$A$\cup$Ø =A

- Distributivitatea reuniunii faţă de intersecţie:

  $\forall$ A,B,C$\subset$E$\Rightarrow$A$\cup$(B$\cap$C)=(A$\cup$B)$\cap$ (A$\cup$C)

- Distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune:

  $\forall$ A,B,C$\subset$E$\Rightarrow$A$\cap$(B$\cup$C)=(A$\cap$B)$\cup$ (A$\cap$C)

- Daca A, B$\subset$E şi A$\subset$B, atunci:

  A$\cup$B=B;

  A$\cap$B=A

Demonstraţiile sunt simple, spre exemplu pentru a arăta A$\cup$ (B$\cup$C)=(A$\cup$B) $\cup$C, procedăm în felul următor:

Notam A$\cup$ (B$\cup$C)=M şi (A$\cup$B) $\cup$C=N, atunci avem de demonstrat:

$$M = N \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} M \subset N \\ N \subset M \end{Bmatrix}$$

Fie x un element arbitrar din M, adică:

$x \in M = A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ sau $x \in B \cup C$;

- dacă $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$, deci $x \in (A \cup B) \cup C = N$;
- dacă $x \in B \cup C \Rightarrow x \in B$ sau $x \in C$;
- dacă $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$, deci $x \in (A \cup B) \cup C = N$;
- dacă $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C = N$.

Deci $\forall x \in M \Rightarrow x \in N$, ceea ce înseamnă că M=N. Fie acum *y* un element arbitrar din N, adică:

$y \in N = (A \cup B) \cup C \Rightarrow y \in A \cup B$ sau $y \in C$;

- dacă $y \in A \cup B \Rightarrow y \in A$ sau $y \in B$;
- dacă $y \in A \Rightarrow y \in A \cup (B \cup C) = M$;
- dacă $y \in B \Rightarrow y \in B \cup C$, deci $y \in A \cup (B \cup C) = M$;
- dacă $y \in C \Rightarrow y \in B \cup C$, deci $y \in A \cup (B \cup C) = M$.

Deci $\forall y \in N \Rightarrow y \in M$, ceea ce înseamnă că $N \subset M$.

Din relaţiile $M \subset N$ şi $N \subset M \Rightarrow M = N$.

❖ *Diferenţa a două mulţimi*

Fie submulţimea lui *E* formată numai din acele elemente care aparţin lui A, dar care nu aparţin lui B. Submulţimea astfel obţinută va fi notata A-B sau A\B şi se va citi „A minus B”, iar operaţia indicată prin unul din semnele de mai sus se numeste *diferentă*.

Utilizând scrierea simbolică avem:

$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}}$$

Referindu-ne la mulţimile ***Q, I, R,*** avem:

R-Q=I şi ***R-I=Q.***

❖ *Complementara unei multimi în raport cu o altă mulţime*

Un caz particular al diferenţei a două mulţimi A şi B este acela când B este o submulţime a lui A. Deci, putem considera mulţimea de referinţă E şi o submulţime A a ei, apoi submulţimea care cuprinde toate elementele lui E, în afară de cele care aparţin lui A. Submulţimea astfel obţinută va fi notată $C_E A$ şi se va citi „complementara lui A în raport cu E" sau, daca nu există pericolul unor confuzii, se va nota CA si se va citi la fel. Aceasta se exprima simbolic asfel:

$$\boxed{C_E A = E\text{-}A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}}$$

Exemple:

1. E={a, b, c, d, e, f}, A={a, c, d, f}

Într-adevar $A \subset E$, deci: $C_E A = E\text{-}A = \{a, b\}$

2. A=[1, 10], B=[4, 7]; $C_E A$=A-B=$[1, 4) \cup (7, 10]$.

Proprietăţi principale în legatură cu complementara unei mulţimi în raport cu mulţimea totală (de referinţă).

1. CE= Ø   2. CØ=E

3. $A \cup CA = E$

4. $A \cap CA = Ø$

5. $C(A \cap B)=(CA) \cup (CB)$ (formulele lui De Morgan) $C(A \cup B)=(CA) \cap (CB)$

❖ *Produs cartezian*

Produsul cartezian a două mulţimi A şi B, nu neapărat submulţimi ale aceleiaşi mulţimi, luate în această ordine, notat AxB, reprezintă mulţimea perechilor (cuplurilor) ordonate de forma (x, y), în care $x \in A$, iar $y \in B$.
Folosind notaţia simbolică avem:

$$\boxed{AxB=\{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.}$$

Observaţii:

- Două cupluri (x, y) si (x', y') sunt egale dacă şi numai dacă x=x' şi y=y'.
- Noţiunea de cuplu este diferită de cea de mulţime cu două elemente. La mulţime avem {x, y}={y, x}, pe când, în general, la cupluri {x, y} $\neq$ {y, x} (egalitatea are loc numai când x=y). De aceea, în general, produsul cartezian nu este comutativ: $AxB \neq BxA$.
- La mulţimea {x, y} se presupune $x \neq y$, dar la cuplul (x, y) nu se exclude x=y.

Exemple:

1. A={1, 2, 3},
   B={a, b};
   AxB={(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)}.
   BxA={(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)}.
   Se observă că $AxB \neq BxA$, căci, de exemplu
   $(1, a) \in AxB$, dar $(1, a) \notin BxA$.

2. A={a, b, c};

   AxA={(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)}.

Generalizare:

Analog se defineşte şi produsul cartezian a trei sau mai multe mulţimi: A_1 x A_2 x . . . x A_n ={(x_1, x_2, . . . , x_n)| $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_n \in A_n$ }.

❖ *Mulţimea părţilor unei mulţimi*

Considerăm mulţimea T={a, b, c} şi formăm toate submulţimile posibile ale lui T, cu câte un element, cu câte două elemente şi cu câte trei elemente, obţinând astfel *mulţimea submulţimilor lui T:* {{a}, {b}, {c}, {a, b}, {b, c}, {a, c}, {a, b, c}}

Pentru a putea aplica operaţiile de reuniune, intersecţie şi diferenţă tuturor elementelor acestei mulţimi introducem un element în această mulţime de submulţimi: Ø.

Definiţie. Spunem că mulţimea submulţimilor lui E, la care se adăuga mulţimea vidă Ø, formează *mulţimea părţilor lui E* şi se va nota: P(T)= { Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {b, c}, {a, c}, {a, b, c}}.

Deci, putem face operaţii de genul:

{a, b} $\cup$ {b, c}={ a, b, c }

{a} $\cap$ {a, b}={a}, C_T({a, b})={c}, {a} $\cap$ {b}= Ø,

{b} $\cap$ Ø= Ø, C_T({a, b, c })= Ø, {c} $\cup$ Ø={c}.

Evident, plecând de la un exemplu de mulţimi finite, cu trei elemente, se poate generaliza pentru orice mulţime finită cu *n* elemente. Se observă că numărul de elemente ale lui P(T) când card(T)=3 este 8= 2^3. Datorită mulţimii vide Ø introduse în P(T), se poate construi o algebra a părţilor unei mulţimi, numită „algebra booleană”.

1.2.4. Relaţii binare şi funcţii

În acest subcapitol sunt prezentate următoarele noţiuni:

- *Relaţii binare*
- *Relaţii de echivalenţă*
- *Relaţii de ordine*
- *Noţiunea de aplicaţie (funcţie)*
- *Aplicaţii injective, surjective şi bijective*
- *Numere cardinale*
- *Corespondenţa biunivocă între două mulţimi*

Relaţii binare

Fie A şi B două mulţimi. O submulţime $R \subseteq AxB$ a produsului cartezian AxB se numeşte relaţie între elementele lui A şi elementele lui B. Pentru o pereche ordonată $(a,b) \in AxB$, putem avea $(a,b) \in R$

caz în care scriem aRb şi citim „a este în relaţie R cu b”, sau avem $(a,b) \notin R$, în care caz citim „a nu este în relaţie R cu b”. Deci $xRy \Leftrightarrow (x,y) \in R$ si

$$R=\{(x,y) \in A\text{x}B \mid xRy\}.$$

În cazul particular când A=B, o relaţie $R \subseteq A\text{x}A$ se numeşte relaţie între elementele lui A, sau mai simplu relaţie pe A.

Fie ***R*** mulţimea numerelor reale. Exemple de relaţii pe mulţimea ***R***:

- $R=\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \wedge 1 \leq y \leq 4\}$
- $G=\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid y= x+ 2 \}$, de unde

  $xGy \Leftrightarrow y= x+ 2.$

Definiţie. Fie A, B, C trei mulţimi; considerăm relaţiile $R \subseteq A\text{x}B$ şi $S \subseteq B\text{x}C$. Relaţia

$$S \circ R=\{(x,z) \in A\text{x}C \mid \exists y((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S)\}$$

Între elementele lui A şi elementele lui C se numeşte compunerea relaţiilor R şi S.

Exemple.

Fie A={1, 2}, B={1, 2, 3};

$R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3)\} \subseteq A\text{x}B$

şi $S=\{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3) \} \subseteq B\text{x}B$.

Avem

$S \circ R=\{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 2) \} \subseteq A\text{x}B$ **şi** $S \circ S=\{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2) \} \subseteq B\text{x}B$.

Proprietăţi ale relaţiilor:

- Asociativitatea compunerii relaţiilor. Fie A, B, C, D patru mulţimi; considerăm relaţiile $R \subseteq A\text{x}B$ şi $S \subseteq B\text{x}C$, $T \subseteq C\text{x}D$. Atunci

  $$T \circ (S \circ R)=(T \circ S) \circ R$$

- Fie A, B două mulţimi. Pentru orice relaţie $R \subseteq AxB$, avem

$$R \circ 1_A = 1_B \circ B = R$$

Definiţie. Fie $R \subseteq AxB$ o relaţie între elementele mulţimii A şi elementele mulţimii B. Relaţia

$$R^{-1} = \{(y,x) \in BxA \mid xRy\} \subseteq BxA$$

între elementele lui B şi elementele lui A se numeşte inversa relaţiei R.

Avem $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$.

Exemple. Fie $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$;

$R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\} \subseteq AxB$. Atunci

$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2)\} \subseteq BxA$.

Relaţii de echivalenţă

Fie R o relaţie pe mulţimea A, adică o submulţime a produsului cartezian AxA. R se numeşte

- relaţie reflexivă dacă $x \in A \Rightarrow xRx$
- simetrică dacă $xRy \Rightarrow yRx$
- tranzitivă dacă $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Relaţia R se numeşte *relaţie de echivalenţă* dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Fie A o mulţime. O familie $\{A_i\}_{i \in I}$ de submulţimi ale lui A se numeşte partiţie a lui A dacă satisface următoarele condiţii: $i \in I \Rightarrow A_i \neq \emptyset$, $A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$, $\cup A_i = A$, $i \in I$.

Propoziţie. Fie R o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A. Dacă, pentru fiecare element $x \in A$, definim $R_x=\{y \in A \mid xRy\}$

Atunci familia $A/R=\{ R_x \mid x \in A \}$ de submulţimi ale lui A este o partiţie a lui A, numită mulţime cât (factor) a lui A prin R.

Exemplu. Relaţia de egalitate. Evident relaţia de egalitate $1_A \subseteq AxA$ este o relaţie de echivalenţă pe A în care orice clasă de echivalenţă modulo 1_A are un unic reprezentant şi $A/1_A =\{ \{ x \} \mid x \in A \}$ este mulţimea tuturor submulţimilor cu un singur element al lui A.

Relaţii de ordine

Definiţie. Fie R o relaţie pe mulţimea A. Relaţia se numeşte antisimetrică dacă: $xRy \wedge yRx \Rightarrow x=y$. O relaţie care este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă se numeşte relaţie de ordine.

Exemple. 1. Relaţia „$\leq$” pe mulţimea numerelor naturale, precum şi pe orice submulţime A a mulţimii numerelor naturale. Dacă, de exemplu A={1, 2}atunci $\{ (1, 1), (1, 2) \} \subseteq AxA$. 2. Relaţia de divizibilitate „$\mid$” $x \mid y \Leftrightarrow (\exists k)(y=kx)$. Dacă A={ 2, 3, 4, 6 }, atunci$\{ (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6) \} \subseteq AxA$.

Noţiunea de aplicaţie (funcţie)

Definiţie. Fiind date mulţimi A şi B şi R o relaţie între elementele lui A şi elementele lui B. Spunem că R este o aplicaţie sau o funcţie definită pe A cu valori în B dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:

- $x \in A \Rightarrow (\exists y)(xRy)$,

- $xRy \wedge xRy' \Rightarrow y = y'$

Propoziţie. Fie $R \subseteq AxB$, atunci R este o aplicaţie definită pe A cu valori în B dacă şi numai dacă sunt satisfăcute condiţiile:

- $1_A \subseteq R^{-1} \circ R$
- $R \circ R^{-1} \subseteq 1_B$.

Este clar că aplicaţia $R \subseteq AxB$ este determinată dacă se cunosc toate valorile notate cu f(x), imaginea lui x prin aplicaţia R. Cu această terminologie, relaţia R ca relaţie între elementele lui A şi elementele lui B se numeşte graficul aplicaţiei $f:A \to B$, mulţimea A se numeşte domeniul de definiţie al aplicaţiei, iar mulţimea B se numeşte codomeniul aplicaţiei, sau domeniul valorilor lui f.

Proprietăţi.

- compunerea a două aplicaţii este tot o aplicaţie**;**
- pentru orice două mulţimi A i B şi pentru orice aplicaţie $f:A \to B$ avem $f \circ 1_A = f = 1_A \circ f$.

Definiţie. a. Fiind date două mulţimi A, B aplicaţia $f:A \to B$ se numeşte injectivă dacă din $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$, sau, echivalent $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

b. Fiind date două mulţimi A, B aplicaţia $f:A \to B$ se numeşte surjectivă dacă ($\forall$ y din B, $\exists$ x din A) astfel încât (y=f(x)).

Proprietăţi.

- În general, dacă A şi B sunt mulţimi de numere reale, o aplicaţie $f:A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă pentru orice $y \in B$, paralela dusă prin punctul de ordonată y la axa absciselor intersectează graficul aplicaţiei în cel mult un punct.

- dacă A şi B sunt mulţimi de numere reale, o aplicaţie f: $A \to B$ este surjectivă dacă şi numai dacă pentru orice $y \in B$, paralela dusă prin punctul de ordonată y la axa absciselor intersectează graficul aplicaţiei în cel puţin un punct.
- dacă A şi B sunt mulţimi de numere reale, o aplicaţie f: $A \to B$ se numeşte ***bijectivă*** dacă este injectivă şi surjectivă.

Numere cardinale

În cele ce urmeză vom da câteva detalii referitoare la introducerea noţiunii de *cardinal*. Considerăm o relaţie de echivalenţă (care este reflexivă, simetrică şi tranzitivă) între mulţimi oarecare (relaţia de echipotenţă).

Definiţie. Două mulţimi A şi B e numesc echipotente şi scriem $A \sim B$ dacă există o aplicaţie bijectivă f: $A \to B$. Relaţia de echipotenţă este o relaţie de echivalenţă pe clasa tuturor mulţimilor. Într-adevăr:

- Pentru orice mulţime A avem $A \sim A$ deoarece aplicaţia identică 1_A: $A \to A$ este bijectivă.
- Dacă f: $A \to B$ este o aplicaţie bijectivă, aplicaţia inversă $f^{-1}: B \to A$ este de asemenea bijectivă şi aceasta arată că $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.
- Compunerea a două aplicaţii bijective este de asemenea o aplicaţie bijectivă, şi aceasta arată că din

  $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Definiţie. Clasele de echivalenţă modulo relaţia de echipotenţă se numesc *numere cardinale*. Mai precis, pentru orice mulţime A, clasa de echivalenţă a lui A modulo-relaţia de echivalenţă se notează cu $|A|$ şi se numeşte cardinalul (sau număr cardinal) al mulţimii A. Deci, cardinalul mulţimii A este clasa tuturor mulţimilor echipotente cu A.

Exemple.

- Cardinalul mulţimii vide Ø este numărul (cardinal) 0.
- Cardinalul mulţimii vide {0} este numărul (cardinal) 1.
- Cardinalul mulţimii {0,1} este numărul (cardinal) 2 etc.

Să reţinem faptul că pentru două mulţimi A şi B avem

$$|\mathbf{A}| = |B| \Leftrightarrow A \sim B.$$

<u>*Corespondenţa biunivocă între două mulţimi*</u>

Definiţie. Se numeşte corespondenţă biunivocă între două mulţimi M şi N formarea perechilor de tipul (m,n), astfel încât:

(1) $m \in M$, iar $n \in N$;

(2) fiecare element intră într-o pereche şi numai în una.

Exemple:

- Daca elevii chemaţi la un spectacol se aşează câte unul pe fiecare scaun fără să rămână nici unul în picioare şi nici un scaun liber, atunci între mulţimea elevilor şi a scaunelor s-a stabilit o corespondenţă biunivocă.
- Corespondenţa biunivocă dintre mulţimile A={1, 2, 3, 4} şi B={a, b, c, d} poate fi reprezentată ca în figura 1.3 (a sau b).
- Nu orice corespondenţă între mulţimi este biunivocă.

Numerele 0, 1, 2, 3, …, n, adica primele n numere naturale, formează o secţiune (o parte) a şirului numerelor naturale 0, 1, 2, 3, …, n, n+1, …

Definiţie. O mulţime care se poate pune în corespondenţă biunivocă cu o secţiune a şirului natural se numeşte mulţime finită. De exemplu dacă T={ a_1

, a_2, ..., a_n}, este o mulţime de n elemente acestea pot fi puse în corespondenţă cu primele n numere naturale.

Definiţie. O mulţime care nu se poate pune în corespondenţă biunivocă cu o secţiune a şirului numerelor naturale, ci cu tot şirul numerelor naturale, (adică numerotând fiecare element al ei cu numere naturale diferite, nu ne putem opri niciodată), se numeşte multime infinită.

Exemple de mulţimi infinite sunt N, N_{2k}, N_{2k+1}, Z prezentate mai sus.

Dacă între două mulţimi A şi B se poate stabili o corespondenţă biunivocă, atunci spunem că cele două mulţimi sunt echivalente sau că au aceeaşi putere.

Faptul că mulţimile A şi B sunt echivalente se poate nota A$\Leftrightarrow$B, iar relaţia de echivalenţă astfel definită are următoarele proprietăţi:

- este *reflexivă* – orice mulţime este echivalentă cu ea însăşi (A$\Leftrightarrow$A);
- este s*imetrică* – dacă mulţimile A şi B sunt echivalente între ele, atunci şi multimile B şi A sunt echivalente între ele (A$\Leftrightarrow$B$\Rightarrow$B$\Leftrightarrow$A);
- esta *tranzitivă* – dacă mulţimile A şi B sunt echivalente între ele, iar mulţimile B şi C sunt şi ele echivalente atunci mulţimea A este echivalentă cu mulţimea C (A$\Leftrightarrow$B şi B$\Leftrightarrow$C$\Rightarrow$A$\Leftrightarrow$C).

Exemple*:*

Următoarele mulţimi finite sunt echivalente (au aceeaşi putere sau acelaşi cardinal), pentru că pot fi puse în corespondenţă biunivocă (având acelaşi număr de elemente):

- A_1={1, 2, 3, 4}; card(A_1)=4

  A_2= {roşu, negru, galben, verde}; card(A_2)=4

  A_3= {est, vest, sud, nord}; card(A_3)=4

  A_4={luni, marţi, miercuri, joi}; card(A_4)=4

- Mulţimea numerelor naturale (N) şi mulţimea numerelor pare (N_{2k}) sunt echivalente (au aceeaşi putere) pentru că între ele se poate stabili o corespondenţă biunivocă astfel:

$$\begin{array}{l} N = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\} \\ \quad\ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\qquad \updownarrow \\ N_{2k} = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots\} \end{array}$$

- Mulţimea numerelor naturale (N) este echivalentă cu mulţimea numerelor naturale impare (N_{2k+1}), deci au aceeaşi putere:

$$\begin{array}{l} N \ = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\} \\ \quad\ \ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\qquad \updownarrow \\ N_{2k+1} = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 2n+1,\ \ldots\} \end{array}$$

Definiţie. O mulţime infinită ale carei elemente se pot numerota, punându-se în corespondenţă biunivocă cu şirul natural, se numeşte *numărabilă*.

Deci *toate mulţimile care au aceeaşi putere (echivalente) cu mulţimea numerelor naturale sunt numărabile.* Spre exemplu, mulţimea numerelor pare, mulţimea numerelor impare, mulţimea numerelor prime şi, în general, *orice parte infinită a mulţimii numerelor naturale, este o mulţime numărabilă.*

Toate mulţimile numărabile sunt echivalente între ele, deoarece fiecare este echivalentă cu **N,** deci formează o clasă – *clasa mulţimilor numărabile*, notată χ_0 (alef zero – prima litera din alfabetul ebraic).

În ceea ce priveşte mulţimile finite se obişnuieste să se spună că *o mulţime finită este întotdeauna numărabilă.*

Unele mulţimi infinite sunt nenumărabile, ca de exemplu mulţimea numerelor reale dintr-un interval dat.

1.2.5. Exerciţii şi probleme propuse

1. Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $-11 \in N$; b) $Z \subset Z$; c) $0 \notin Z_+$; d) $Z_+ \neq Z$ e) $0 \in \{0\}$; f) $\{2,3\} \neq \{23\}$; g) $N^* \neq Z_+$; h) $4 \notin Z_-$

2. Reprezentaţi în trei moduri mulţimea numerelor naturale mai mici ca 9 care sunt cuburi perfecte.

3. Fie mulţimile: $A=\{5,7\}$, $B=\{1,5\}$, $C=\{x \in Z \mid |x|=5\}$ şi $D=\{x \in N \mid x=5^n, n \in N, n<3\}$.

a) Determinaţi mulţimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$ şi $A \times B$.

b) Determinaţi mulţimile C şi D.

c) Determinaţi cardinalele mulţimilor A , B , C şi D.

d) Determinaţi mulţimile: $A \cup B \cup C \cup D$, $A \cap B \cap C$, $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(B-C) \cap A$.

4. Determinaţi mulţimile R şi S, ştiind că :

$R \cup S=\{0, 1, 4, 5, 6\}$, $R-S=\{1,4\}$, $S-R = \{0, 6\}$.

5. Determinaţi mulţimile D_6; D_{21}; M_3; M_{10}.

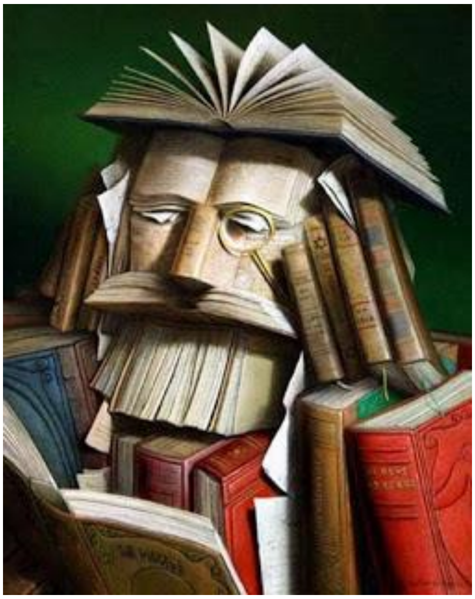
6. Completaţi cu simbolul potrivit ($\in$, $\notin$, $=$, $\neq$ sau $\subset$) pentru a obţine propoziţii adevărate:

a) $-3 \ldots Z$; b) $-7 \ldots N$; c) $N^* \ldots N$; d) $Z_+ \ldots Z$; e) $\{0\} \ldots \varnothing$ f) $\{9\} \ldots \{9, 10\}$; g) $|-7| \ldots -7$.

Cap. 2. Mulţimea numerelor naturale

Aşa cum îl percepem astăzi, chiar şi în matematica modernă, noţiunea de număr rămâne una din cele mai importante noţiuni ale matematicii. Caracterul abstract al conceptului de număr constă în faptul că poate fi aplicat oricărei categorii de obiecte şi fenomene. Numărul, forma şi numele sunt categorii fundamentale ale cunoaşterii, deoarece „suma tuturor însuşirilor ale unui obiect este cuprinsă pe deplin în forme şi în proporţiile lui numerice, care devin bunuri ale conştiinţei mele”[2].

Creativitatea a dus la cunoaştere, Cunoaşterea se limitează la a nu avea limite.



Fr. Engels arată că numerele constituie mijlocul prin care noi exprimăm determinarea cantitativă a obiectelor şi fenomenelor, considerând numărul „cea

[2] J. H. Pestalozzi (34, p. 393)

mai pură determinare cantitativă din câte cunoaştem", dar adaugă că „el este plin de diferenţe calitative"[3].

2.1. Relaţia de echipotenţă

Definiţie. Două mulţimi care pot fi puse în corespondenţă biunivocă se numesc *mulţimi echivalente.*

Relaţia de echivalenţă grupează mulţimile în *clase de echivalenţă,* fiecare clasă cuprinzând mulţimile formate din acelaşi număr de elemente, indiferent de natura lor. Prin urmare, o clasă de echivalenţă este caracterizată printr-o proprietate comună tuturor tuturor mulţimilor ce-i aparţin, anume proprietatea de a conţine acelaşi număr de elemente. Această proprietate se numeşte *puterea clasei de echivalenţă* şi este reprezentată printr-un număr numit *număr natural.* În concluzie, *numărul natural constituie simbolul care caracterizează sub un înalt grad de generalitate mulţimile echivalente.*

Astfel, proprietatea caracteristică mulţimii vide este reprezentată prin numărul zero, de unde rezultă că zero este un număr natural întrucât caracterizează clasa de echivalenţă a mulţimilor care nu conţin nici un element. Proprietatea caracteristică mulţimilor cu un singur element este reprezentată prin numărul 1; cea a mulţimilor cu un element şi încă unul este reprezentată de numărul 2; cea a mulţimilor cu 2+1 elemente, sau cu 1+1+1 elemente, este reprezentată prin numărul 3 ş.a.m.d. Prin urmare, numerele 0, 1, 2, 3,..., n,... caracterizează mulţimile echivalente formate respectiv din 0, 1, 2, 3 ,...n,... elemente şi se numesc *numere naturale.*

2.2. Cardinalul unei mulţimi

---

[3] F. Engels (35, p. 263)

Cardinalul unei mulţimi s-a introdus în primul capitol cu ajutorul relaţiei de echipotenţă.

Întrucât clasa tuturor mulţimilor echivalente cu o mulţime A se numeşte *cardinalul mulţimii* A, notat card.(A) sau $|A|$, rezultă că *numărul natural este cardinalul mulţimilor finite de aceeaşi putere.*

Pentru mulţimile finite identificăm clasa mulţimilor de câte *n* elemente, deci cardinalul finit *n*, cu numărul natural *n*. Spre exemplu, pentru mulţimea elevilor unei clase, pentru mulţimea literelor din alfabetul latin etc. corespunde câte un cardinal pe care îl identificăm cu numărul elementelor mulţimii respective, deci cu un număr natural.

Dacă ne referim la mulţimile infinite, o clasă de mulţimi infinite echivalente se numeşte *cardinal transfinit.* Spre exemplu, toate mulţimile echivalente cu mulţimea numerelor naturale formează o clasă, deci un cardinal transfinit.

În concluzie, noţiunea de cardinal generalizează noţinea de număr natural pe care o conţine ca un caz particular, cazul mulţimilor finite de aceeaşi putere.

2.3. Axiomele lui Peano

Definiţie. (*Sistem Peano*[4]) Se numeşte sistem Peano un triplet *(N, 0, s)* format cu o mulţime nevidă N, un element 0 din N şi o funcţie s: N→N care satisface condiţiile:

P_1) $s(x) \neq 0, \ \forall x \in N$;

P_2) s este funcţie injectivă;

P_3) dacă P este o parte a lui N care are proprietăţile:

1) $0 \in P$
2) $\forall x \in P \Rightarrow s(x) \in P$

[4] De la matematicianul italian Giuseppe Peano (1858 -1932)

Atunci P=N.

Teoria axiomatică a mulţimilor asigură existenţa a cel puţin unui sistem Peano *(**N**, 0, s)*.

Elementele lui ***N*** se numesc numere naturale iar s se numeşte funcţia succesor. Pentru notarea numerelor naturale folosim literele m, n, p,....Dacă n $\in$ ***N*** atunci n'=s(n) se numeşte succesorul lui n. Numerele naturale 0, 1=s(0), 2=s(1),...se numesc zero, unu, doi, etc.

Condiţiile P_1, P_2, P_3 sunt cunoscute sub numele de axiomele lui Peano şi pot fi rescrise astfel:

P_1) 0 nu este succesorul nici unui număr natural;

P_2) numere naturale diferite au succesori diferiţi;

P_3) dacă o mulţime P de numere naturale conţine pe 0 şi o dată cu orice număr natural n conţine şi succesorul său n' atunci P coincide cu mulţimea tuturor numerelor naturale.

Axioma P_3 este cunoscută sub numele de axioma inducţiei şi stă la baza raţionamentului cunoscut sub numele de inducţie matematică.

Din adevărurile exprimate de aceste axiome desprindem principiul de formare al numerelor naturale: *fiecare număr natural se formează prin adăugarea unei unităţi la predecesorul său,* fapt ce permite aşezarea numerelor naturale în ordinea mărimii lor în sens ascendent sau descendent, astfel încât fiecare să se obţină din precedentul său plus o unitate sau din succesorul său minus o unitate. Considerând pe zero ca prim număr natural, vom avea în sens ascendent: 0, 0+1=1, 1+1=2, 2+1=3 ş.a.m.d., formâdu-se astfel şirul numerelor naturale: 0, 1, 2, 3,..., n, n+1, ...Şirul numerelor naturale formează o mulţime de numere, şi anume *mulţimea numerelor naturale,* care se notează cu ***N***. Deci: ***N***$=\{0,1,2,3,...,n,...\}$. Dacă din această mulţime lipseşte numărul zero, avem *şirul restrâns* al numerelor naturale, mulţimea respectivă notându-se cu $\mathbf{N}^*$. Deci: $\mathbf{N}^*=\{1,2,3,...,n,...\}$.

Oricare ar fi numerele naturale *a,b,c...* ele au următoarele proprietăţi:

1) **Reflexivitatea:** Orice număr natural este egal cu el însuşi, adică a = a, $\forall a \in N$.

2) **Simetria:** Dacă un număr natural *a* este egal cu un număr natural *b,* atunci şi *b* este egal cu *a,* $\forall a \in N$, $b \in N, a = b \Leftrightarrow b = a$

3) **Tranzitivitatea:** Dacă un număr natural *a* este egal cu numărul natural *b* şi dacă la rândul său numărul natural *b* este egal cu numărul natural *c*, atunci şi *a* este egal cu *c*.

$\forall a \in N$
$\forall b \in N$ dacă a = b şi b = c $\Rightarrow$ a = c.
$\forall c \in N$

Relaţia de ordine pe **N**

În baza construcţiei axiomatice de mai sus (şi mai ales proprietatea ce stă la baza inducţiei completă) se deduce că între două numere naturale *a* şi *b* poate avea loc una şi numai una din relaţiile:

a < b; a = b; a > b.

Ţinând seama de relaţia de ordine care se defineşte prin semnele $\leq sau \geq$, se spune că şirul numerelor naturale este un *şir ordonat.* Acest adevăr constituie temeiul numărării ascendente până la un număr oarecare, spre exemplu până la 10: 0, 1, 2, 3,..., 9, 10 sau al numărării descendente de la un număr oarecare 0:10, 9, 8,..., 2, 1, 0.

Introducerea relaţiei de ordine trebuie să aibă la bază explicaţii accesibile elevilor din clasele mici, de aceea vom spune că inegalităţile a < b sau a > b pot avea următorul înţeles: dacă în şirul natural al numerelor se întâlneşte întâi numărul *a* şi apoi numărul *b*, atunci a<b, iar dacă în acest şir se întâlneşte mai întâi numărul *b* şi apoi numărul *a* , atunci a>b.

Relaţiile de inegalitate au aplicaţii nu numai în stabilirea succesiunii numerelor din şirul natural, ci cu deosebire în stabilirea relaţiei de mărime dintre două numere naturale oarecare, pentru a arăta care din cele două numere este mai mare (şi eventual cu cât) sau care din ele este mai mic(şi cu cât), adică în exerciţii de forma:

2>1 pentru că 2=1+1 8>5 pentru că 8=5+3

1<2 pentru că 1=2-1 5<8 pentru că 5=8-3.

Proprietatea şirului numerelor naturale de a fi infinit se deduce pe baza relaţiei de ordine, lucru care se exprimă sub formă elementară prin aceea că, oricât de mare ar fi un număr natural n, i se poate adăuga încă o unitate, obţinându-se un număr şi mai mare: n+1.

Relaţia de ordine în mulţimea numerelor naturale se introduce în legătură cu noţiunile „mai mult”, „mai puţin”, şi anume prin punerea în corespondenţă a mulţimilor aparţinând unor clase de echivalenţă diferite. Astfel se pun în corespondenţă, termen cu termen, două mulţimi cu un număr inegal de elemente, spre exemplu prima conţinând 5 elemente, a doua 4, şi prin formare de perechi se constată că un element din prima mulţime rămâne fără pereche, de unde concluzia că prima mulţime are mai multe elemente, a doua mai puţine. Rezultatul comparării se notează cu ajutorul semnelor „ <”sau „ >” plasate între numerele care caracterizează cantativ mulţimile respective, adică 5>4 şi 4<5.

De asemenea, ordonarea numerelor naturale şi stabilirea succesiunii lor ascendente sau descendente se realizează prin compararea şi punerea în corespondenţă biunivocă a mulţimilor cu 0, 1, 2, 3,... elemente, stabilind din aproape în aproape următoarele şiruri de inegalităţi:

0<1 sau 1>0

1<2 sau 2>1 etc.

2.4. Sisteme de numeraţie

Scurt istoric

Din punct de vedere istoric, sistemul poziţional al babilonienilor era diferit de al nostru prin faptul că nu exista *numărul zero,* iar semnele pentru unităţi, zeci etc. se scriau prin alăturare, şi nu prin cifre speciale cum avem noi.

Sistemul de scriere al numerelor folosit de romani a derivat din cel al etruscilor. Unitatea era reprezentată printr-o bara verticală, ca si la egipteni. Pentru 10 se folosea semnul X. Asupra originei lui sunt mai multe presupuneri. Unii cred ca el ar reprezenta imaginea schematică a două mâini cu degete răsfirate şi asezate una sub alta, alţii presupun că ar proveni din semnul lui 1, adică ar fi o *bară*, tăiată de-a curmezişul de o altă linie, aşa cum se proceda la însemnările pe răboj sau la oasele striate atunci când se ajungea cu număratul la a zecea crestătură. Pentru a nota 100 se folosea litera C, iniţiala de la cuvantul *centum* (100), iar pentru 1000 litera M, initiala lui *mille* (1000). Dacă primele două semne au putut fi folosite chiar şi mai înainte de a se fi născocit alfabetul, ultimele două arată că sunt de o provenienţă mai nouă.

Cu aceste patru semne: I,X,C,M romanii puteau scrie orice număr, bazându-se pe următorul principiu de adunare şi scădere, luat tot de la etrusci, orice semn aşezat la dreapta altuia se adună cu acela şi dacă are o valoare mai mică sau egală cu el, scris la stânga unui semn cu o valoare mai mare ca a lui, se scade. De pilda CII=102; XII=92. Mai tarziu, romanii au introdus o simplificare a scrierii prin adaugarea altor trei semne care sa reprezinte pe 5=V; 50=L; 500=D. Originea lor apare oarecum intuitiv, privind primele semne: V este jumătatea lui X şi, după prima ipoteză, el ar putea fi schiţa unei mâini cu degete răsfirate; L se aseamănă cu jumatatea de jos a literei C, tăiată cu o bară orizontală, iar D se pare că a provenit în acelaşi mod dintr-un semn mai vechi folosit de romani pentru a desemna 1000, anume CI şi C întors invers, semn care tăiat în două, de data asta cu o bara verticala –partea din dreapta corespunde literei D. Introducându-se aceste semne noi, repetarea unităţilor se oprea la 4 şi nu mai continua până la de nouă ori.

Pentru noi, obişnuiţi cu scrierea poziţională a numerelor, formarea sau citirea numerelor scrise după sistemul roman, chiar după introducerea acestor noi semne, ne apare foarte complicat. Iată, de pildă, cum trebuie procedat ca să se scrie un număr destul de simplu ca 798: Mai întâi 700=500+200 adică DCC; apoi 90=100-10 adica XC, 8=5+3 adică VIII sau grupând totul la un loc, de la stânga la dreapta: 798=DCCXCVIII

Aşadar, dupa felul de grupare şi ordonare a semnelor s-au deosebit două sisteme de numeraţie:

- sistemul aditiv
-sitemul poziţional

<u>Sistemul de numeraţie aditiv</u>

Cel mai cunoscut sistem aditiv de numeratie e cel roman. Acesta foloseşte numai 7 simboluri (numite cifre romane) care corespund anumitor numere dupa cum urmează:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Toate celelalte numere se scriu alăturând semnele de mai sus începând cu cel mai mare. Ex: 738=DCCXXXVIII=500+100+100+10+10+10+5+1+1+1

Observaţie: în cadrul unui număr scris în sistemul roman nu pot să apară mai mult de 3 semne consecutive de acelaşi fel.

Pentru acest motiv următoarele numere se scriu cu două semne, primul reprezentând un număr care se scade din al doilea:

IV	IX	XL	XC	CD	CM
4	9	40	90	400	900

Astfel numarul 3496 se va scrie în sistemul roman: MMCDXCVI=3496

Pentru numerele foarte mari s-a făcut convenţia ca grupul de cifre ce reprezintă clasa miilor să se scrie cu o bară deasupra, cel ce exprimă clasa milioanelor, cu doua bare deasupra ş.a.m.d.

Observăm cât de greu se scriu numerele mari în cadrul acestui sistem, ne imaginăm ce mari complicaţii apar când va trebui să operăm cu ele.

Mai observăm că o cifra în cadrul unui număr scris în sistemul roman are aceeaşi valoare, indiferent de poziţia pe care o ocupă în cadrul numărului. Se zice că sistemul roman de numeraţie e nepoziţional.

Sistemul poziţional

Neajunsurile sistemului de numeraţie roman (nepoziţional) între care numerele foarte lungi, de necuprins cu privirea, operaţiile cu numere scrise în acest sistem extrem de anevoioase şi altele au determinat conceperea unui sistem de numeraţie mai raţional.

În acest sistem se folosesc 10 simboluri (cifre arabe): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: zece unităţi formează o grupă nouă căreia îi spunem 10 şi pe care o scriem cu doua cifre, 10: zece grupe de câte zece formează o grupă nouă careia îi zicem "o sută" şi pe care o scriem cu trei cifre, 100; zece sute formează o grupa de ordin superior, căreia îi zicem "o mie" şi pe care o scriem cu patru cifre, 1000, s.a.m.d.`

În Europa, numerele mai mari decât un milion nu au căpătat denumiri speciale decât după ce în secolul al XVI-lea a fost adoptat, în mod definitiv, sistemul zecimal poziţional de scriere a numerelor. Cuvântul milion a apărut la sfârşitul secolului al XIII –lea şi a fost inventat de Marco Polo care, entuziasmat de mulţimea oamenilor şi a bogăţiilor pe care le-a vazut în China, a format superlativul de la cuvântul *mille* (o mie în limba italiană), anume *millione.*

Ţinând seamă de împărţirea numerelor în clase, fiecare clasă fiind compusă, la rândul ei, din trei ordine (unităţi, zeci şi sute), clasa milionelor este a treia, urmând după clasa unităţilor simple şi a miilor. În continuare clasa a patra este clasa bilioanelor (*bi* înseamnă doi), aceasta numindu-se şi clasa miliardelor. După ea urmează clasa trilioanelor. În secolul XIX s-a stabilit o regulă generală de formare a numelui clasei căreia îi aparţine un număr. Anume ca să putem şti ce nume să dăm clasei unui număr se procedează astfel: începând cu clasa a patra (a bilioanelor) numele oricărei clase superioare lui patru se formează scăzând doi din clasa numărului respectiv, iar la numirea latinească a numărului ce reprezintă restul se adaugă terminaţia *ilion.* De exemplu, un număr din clasa a cincea se numeşte *trilion,* fiindcă din clasa a 5-a se scade 2 şi rămân 3, aşadar numărul face parte din clasa trilioanelor, numărul din clasa a 6-a se numeşte *cvadrilion* (6-2=4), din clasa a 7-a *cvintilion,* apoi *sextilion, septilion, octolion, nonolion, decilion, etc.*

Presupunem că elementele unei mulţimi finite sunt supuse procesului de numărare. Operaţia se va desfăşura în mod organizat astfel: elementele simple (bucăţi, obiecte, unităţi) se vor grupa întâi câte zece; dacă toate unităţile simple intră în aceste grupe, asfel încât nici o unitate să nu rămână pe dinafară negrupată, yicem că s-a obţinut un număr întreg de *zeci,* grupări de ordinul al II-lea, restul unităţilor de ordinul I fiind nul, adică r_1 =0. În când rămân unităţi negrupate, adică $r_1 \neq 0$, numărul lor nu poate fi decât mai mic decât 10, dacă r_1<10. Numărul de zeci obţinut se grupează apoi câte 10, obţinând zeci de zeci, adică *sute,* unităţi de ordinul al III-lea, restul *r,* al unităţilor de ordin II, negrupate fiind de asemenea ori nul, ori mai mic decât zece, dacă $r_1 \neq 0$.

Grupând sutele în grupe de câte 10, se obţin *mii*, unităţi de ordinul al IV-lea, şi continuând în acelaşi fel se obţin succesiv *zeci de mii, milioane, zeci de milioane, miliarde sau bilioane, apoi zeci de miliarde, sute de miliarde, trilioane* etc., adică unităţi de ordinul al V-lea, al VI-lea ş.a.m.d.

Gruparea unităţilor la modul arătat mai sus are la bază numărul 10, fiindcă zece unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior. Dar gruparea unităţilor, în scopul numărării lor, se poate face în perechi, cate 5, câte 8, câte12 etc., adică având la bază un alt număr considerat convenabil. Spre exemplu, dacă unităţile se grupează câte 8, atunci unitatea de ordinul al II-lea va fi formată din 8 unităţi simple, unitatea de ordinul al III-lea va fi formată din 8 unităţi de ordinul al II-lea şi, prin urmare, va conţine $8^2 = 64$ unităşi simple, apoi unitatea de ordinul al IV-lea va conţine $8^3 = 512$unităţi simple etc.

Definiţii:

a) Ansamblul regulilor de grupare al elementelor unei mulţimi în scopul numărării lor şi de reprezentare simbolică a numărului obţinut se numeşte *sistem de numeraţie.*.

b) Simbolurile (semnele) grafice cu ajutorul cărora se reprezintă unităţile de ordin diferit se numesc *cifre.*

c) Numărul care arată câte unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior se numeşte *baza sistemului de numeraţie.* Ca bază a unui sistem de numeraţie se poate alege orice număr $k \in N^*, k \neq 1$. Diferitele sisteme de numeraţie se denumesc după bazele pe care le au: sistemul *dual* sau *binar* cu baza 2, sistemul *octal* cu baza 8, sistemul *zecimal* cu baza 10, sistemul *duodecimal* cu baza 12, sistemul *hexazecimal* cu baza 16, sistemul *sexazecimal* cu baza 60 etc.

Întrucât numărul unităţilor de un anumit ordin în orice sistem de numeraţie trebuie să fie cel puţin cu o unitate mai mic decât baza acelui sistem, adică numărul unităţilor poate fi 0, 1, 2,..., k-1, dacă cu k am notat baza sistemului, rezultă că numărul simbolurilor necesare pentru reprezentarea grafică a unităţilor respective este egal cu baza sistemului de numeraţie. Astfel în sistemul cu baza 2 sunt suficiente simbolurile: 0 şi 1, în sistemul zecimal avem simbolurile: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi 9, în sistemul duozecimal: 0, 1, 2, 3,..., 9, α, β , iar îm sistemul hexazecimal avem 10 simboluri utilizate de sistemul zecimal: 0, 1, 2, ..., 8, 9, completate cu literele A, B, C, D, E, F corespunzătoare numerelor 10, 11, 12, 13, 14, 15.

d) Simbolurile grafice au două aspecte valorice:

(1) *Valoarea cifrică*, aceasta fiind dată de cardinalul mulţimii a cărei putere este egală cu numărul pe care îl indică simbolul respectiv. Cu alte cuvinte, valoarea cifrică reprezintă corespondenţa dintre simbolul grafic şi numărul elementelor mulţimii considerate.

(2) *Valoare poziţională*, aceasta fiind dată de locul pe care simbolul respectiv îl ocupă în scrierea numărului, adică de ordinul unităţilor pe care le reprezintă. Astfel, dacă cifra α se află pe locul I (din dreapta), atunci ea indică unităţi simple: dacă se află pe locul al II-lea (din dreapta) indică unităţi de ordinul II ş.a.m.d.

Inexistenţa unităţilor de un anumit ordin se indică prin marcarea locului respectiv cu cifra zero.

Un sistem de numeraţie este poziţional dacă simbolurile grafice pe care le utilizează se caracterizează atât prin valoarea cifrică, cât şi prin valoarea poziţională. Spre exemplu, sistemul zecimal este poziţional. În schimb, numeraţia romană nu are caracter poziţional, fiindcă un simbol oarecare are aceeaşi valoare indiferent de locul pe care îl ocupă în scrierea numărului. Spre exemplu, simbolul V al numărului cinci reprezintă 5 unităţi simple în fiecare din numerele XV, XVI; XVII, XVIII, deşi locul pe care îl ocupă este diferit.

2.5. Baze de numeraţie

Operaţia prin care un număr scris într-o bază *k* este trecut într-o altă bază *k'* se numeşte *conversie (sau transformare).*

a) *Conversia unui număr din baza 10 într-o bază oarecare k.* Se consideră numărul A, scris în baza 10. Pentru a trece acest număr din baza 10 în baza k, vom grupa unităţile de ord.I ale numărului A în grupe de câte *k*, obţinând un număr q_1 de grupări – unităţi de ordinul al II-lea – şi un rest $r_0 <$ k, unităţi de ordinul I rămase negrupate, pe care le notăm cu a_0 deci $r_0 = a_0$. Unităţile q_1, de ord. al II-lea, le vom grupa de asemenea în grupe de câte *k;* obţinând un număr q_2 de grupări – unităţi de ordinul al III-lea – şi un rest $r_1 <$ k, unităţi de ordinul al II-lea rămase negrupate pe care la notăm cu a_1, deci $r_1 = a_1$. La rândul lor, cele q_2 unităţi de ordinul al III-lea se grupează câte *k*, obţinând q_3 unităţi de ordinul al IV-lea, iar restul $r_2 <$ k reprezintă numărul unităţilor de ordinul al III-lea rămase negrupate, pe care le notăm cu a_2, deci $r_2 = a_2$. Se continuă în acelaşi fel cu gruparea unităţilor de diferite ordine în grupe de câte *k*, obţinându-se unităţi de ordinul al IV-lea, al V-lea ş.a.m.d., pe care le notăm cu a_3, a_4...., până se ajunge la un cât $q_n <$ k , astfel încât $q_n = 0 \cdot k + r_n = r_n$ care reprezintă numărul unităţilor de ordinul n-1, notat cu a_n, iar resturile succesive luate în ordine descendentă: reprezintă unităţile de ordinul n, n-1,...,3, 2, 1, adică cifrele $a_{n-1},..., a_3, a_2, a_1, a_0$ ale numărului scris în noua bază *k*.

Schema acestor grupări este urmatoarea:

$$A = q_1 k + r_0 k; \qquad r_0 = a_0 < k$$
$$q_1 = q_2 k + r_1; \qquad r_1 = a_1 < k$$
$$q_2 = q_3 k + r_2; \qquad r_2 = a_2 < k$$
$$q_3 = q_4 k + r_3; \qquad r_3 = a_3 < k$$
....
$$q_{n-1} = q_n k + r_{n-1}; \qquad r_{n-1} = a_{n-1} < k şşi_n < k$$

$$q_n = q_{n+1} k + r_n; \qquad r_n = a_n < k \quad şi q_{n+1} < 0$$

Prin urmare: $152971_{(10)} = 452613_{(8)}$

unde 4,5,2,6,1,3 reprezintă cifrele numărului in baza 8, scriem în ordinea descrescătoare a ordinului unităţilor.

2.6. Operaţii în N

- *Adunarea*

Se consideră mulţimile A şi B, disjuncte ($A \cap B = \emptyset$), cu a, respectiv b elemente (a= card (A), b = card (B)). Expresia care reprezintă numărul elementelor mulţimii ce se obţine prin reuniunea celor două mulţimi date se numeşte suma numerelor a şi b. Se scrie a + b. Legea de compoziţie indicată prin semnul + (plus) se numeşte adunare, iar numerele care se adună se numesc termenii adunării.

Teoremă. Există o unică lege de compoziţie φ:***NxN→N*** pe mulţimea numerelor naturale astfel încât adoptând notaţia aditivă pentru φ să avem:

A1). n+0=n, $\forall$ n $\in$ ***N***

A2). n+m'=(n+m)' , $\forall$ n $\in$ ***N***

Condiţiile A1, A2 se numesc axiomele adunării, iar pentru a face explicaţiile mult mai accesibile vom merge pe notaţia clasică. Astfel, mai simplu putem deduce că: adunarea, ca lege de compoziţie pe ***N***, notată cu semnul +, este totdeauna posibilă în mulţimea ***N***, fiindcă fiecărui cuplu (a, b) de numere naturale i se asociază prin legea indicată un al treilea număr c, de asemenea natural, astfel încât avem:

$$\boxed{a + b = c \qquad a, b, c \in \mathbf{N}}$$

Deci suma a două numere naturale este întotdeauna număr natural.

Proprietăţile adunării

- *Asociativitatea.* Într-o sumă de trei sau mai mulţi termeni se pot înlocui unii termeni prin suma lor: a + b + c = (a + b) + c =a + (b + c).
- *Comutativitatea.* Într-o sumă de doi (sau mai termeni se poate schimba ordinea termenilor: a + b = b + a.

Ambele proprietăţi se bazează pe definiţia adunării şi pe axioma numărării, ţinând seama de faptul că adunarea la un număr de unităţi a altui număr de unităţi este o numărare în continuare la unităţile primului număr a unităţilor numărului al doilea.

- *Element neutru.* În mulţimea numerelor naturale există un element notat cu semnul 0 şi numit zero, cu proprietatea că pentru orice element $a \in N$ este adevărată egalitatea:
- a + 0 = 0 + a = a.

Numărul zero se numeşte element neutru pentru adunare întrucât orice număr natural adunat cu zero rămâne neschimbat.

Pe baza definiţiei şi a proprietăţilor adunării, se pot formula următoarele reguli de calcul:

Efectuarea unei sume de doi sau mai mulţi termeni. O sumă de doi sau mai mulţi termeni se efectuează astfel: se adună la primul termen unităţile celui de-al doilea, la suma obţinută se adună termenul al treilea ş.a.m.d.

a + b + c + d = (a + b) + c + d = $[(a+b)+c]+d$.

Ori de câte ori este posibil şi prezintă avantaje în calcul, se aplică proprietăţile de asociativitate şi comutativitate.

a) Adunarea la o sumă a unui număr se poate face în două feluri:

- se efectuează suma şi apoi la rezultatul obţinut se adună numărul:
  (a + b) + c = s + c dacă s = a + b;
- se adună numărul la unul din termenii sumei:
  (a + b) + c = (a + c) + b = a + (b + c).

Ţinând seama de cele stabilite, la efectuarea adunării într-un sistem poziţional oarecare, putem stabili şi pentru sistemul zecimal că pentru a aduna două sau mai multe numere între ele unităţile de acelaşi ordin, adică, atât oral, cât şi în scris, unităţile simple se adună cu unităţile simple, zecile cu zecile, sutele cu sutele etc. Pentru a uşura efectuarea calculului în scris, termenii se aşează unul sub altul astfel ca unităţile de acelaşi ordin să se afle pe aceeaşi coloană. Acesta este algoritmul adunării numerelor naturale.

Scăderea

Scăderea nu este lege de compoziţie definită pe mulţimea numerelor naturale, întrucât nu oricărui cuplu (a, b) de elemente din **N** îi corespunde un element a-b$\in N$ **.** Scăderea pe **N** este posibilă numai dacă $a \geq b$. În aceste condiţii operaţia de scădere se defineşte astfel: a scădea dintr-un număr natural a, numit descăzut, un alt număr natural b, numit scăzător, unde $a \geq b$, înseamnă a găsi un al treilea număr natural c, numit rest

$$\boxed{\text{a-b=c pentru că a = b+c; a,b,c} \in N, a \geq b}$$

sau diferenţă, care adunat cu scăzătorul să ne dea descăzutul.

Se observă că scăderea se defineşte ca operaţie inversă adunării. De aici concluzia că scăderea se verifică prin adunare.

S-a arătat că scăderea a – b este posibilă în **N** şi are rezultat unic numai dacă $a \geq b$. În cazul particular a = b, diferenţa a – b este nulă, adică a – a = 0 pentru că a = a + 0.

a) Scăderea dintr-o sumă a unui număr se face scăzând acel număr din unul din termenii sumei:

$$(a + b) - n = (a - n) + b = a + (b - n),$$

pentru că, potrivit definiţiei şi notând cu d diferenţa (a + b) – n, avem: $(a + b) - n = d \Rightarrow a + b = d + n = (a + b) - n + n = a + b$.

b) Scăderea dintr-un număr a unei sume se face scăzând din acel număr în mod succesiv fiecare termen al sumei:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

c) Scăderea dintr-un număr a unei diferenţe se face adunând la acel număr scăzătorul şi descăzutul diferenţei:

$$a - (b - c) = a - b + c = a + c - b.$$

Motivare: Conform definiţiei scăderii avem:

$a - (b - c) = d \Rightarrow a = d + (b - c) = a - (b - c) + (b - c) = a.$

a) Într-o sumă doi termeni, unul din termeni este egal cu suma minus celălalt termen:

$$a + b = s \Rightarrow \begin{cases} a = s - b, \\ b = s - a. \end{cases}$$

Motivarea:

$$a = s - b = a + b - b = a,$$

$$b = s - a = a + b - a = b,$$

b) Într-o diferenţă descăzutul este egal cu suma dintre scăzător şi rest: $a - b = d \Rightarrow a = b + d$, conform definiţiei scăderii.

c) Într-o diferenţă scăzătorul este egal cu descăzutul minus restul:

$a – b = d \Rightarrow b = a – d$.

f) Mărirea scăzătorului cu un număr are drept consecinţă micşorarea diferenţei cu acel număr, iar mişorarea scăzătorului cu un număr are drept condecinţă mărirea diferenţei cu acel număr:

$a – b = d$

$a – (b + n) = d – n$ pentru că $a – (b + n) = a – b – n = (a – b) – n = d – n$

şi $a – (b – n) = d + n$ pentru că $a – (b – n) = a – b + n = (a – b) + n = d + n$.

Regula generală de scădere a unui număr din alt număr: unităţile de acelaşi ordin se scad între ele. Adică se scad unităţile simple din unităţile simple, zecile din zeci, sutele din sute etc. Ca şi la adunare, pentru înlesnirea calculului în scris termenii se aşează astfel încât unităţile de acelaşi ordin să se afle pe aceeaşi coloană. Acesta este algoritmul scăderii numerelor naturale.

Scăderea se utilizează în rezolvarea problemelor în următoarele cazuri:

- când acţiunea indicată de problemă are înţeles de luare sau scoatere;
- când se cere aflarea unui număr care să fie cu câteva unităţi mai mic decât numărul dat;
- când problema se referă la compararea prin diferenţă a două numere (a două mărimi) pentru a stabili care este mai mare sau mai mic şi cu cât.

❖ *Înmulţirea*

Teoremă. Pe mulţimea numerelor naturale există o unică lege de compoziţie φ: ***NxN→N*** pe mulţimea numerelor naturale astfel încât adoptând notaţia multiplicativă pentru φ să avem:

I1). $n \cdot 0=0, \forall n \in \boldsymbol{N}$

I2). $n \cdot m' = nm+n, \forall n,m \in \boldsymbol{N}$

Unica lege de compoziţie pe ***N*** care satisface I1 şi I2 se numeşte înmulţirea numerelor naturale, condiţiile I1 şi I2 se numesc axiomele înmulţirii numerelor naturale.

Studenţii instituţiilor pedagogice trebuie să aibă în vedere modalitatea în care aceste noţiuni sunt introduse la elevii claselor mai mici. Acest lucru ne determină să operăm cu noţiuni simple pe înţelesul tuturor. Vom introduce proprietăţile înmulţirii, ca şi în cazul adunării, în cel mai lejer cadru posibil: a înmulţi un număr $a \in$ ***N***, numit deînmulţit, cu un alt număr $b \in$ ***N,*** numit înmulţitor, înseamnă a repeta pe a ca termen al adunării de b ori.

Se scrie $\underbrace{a + a + ... + a}_{debori} = a \times b = a \cdot b = ab$

Din definiţie rezultă că înmulţirea este *adunarea repetată a aceluiaşi termen.*

Deînmulţitul şi înmulţitorul se numesc *factori*, iar rezultatul înmulţirii se numeşte *produs*.

Întrucât prin înmulţire fiecărui cuplu, (a, b) de elemente din ***N*** i se asociază un alt element din ***N,*** notat ab, rezultă că înmulţirea pe ***N,*** este totdeauna posibilă. De altfel, ţinând seama de faptul că înmulţirea este o adunare repetată şi că adunarea este totdeauna posibilă pe ***N***, se ajunge la aceeaşi concluzie. Deci înmulţirea este o lege de compoziţie (operaţie algebrică) definită pe ***N***.

În cazul particular a = 0 sau b = 0, avem:

$$0 . b = a . 0 = 0.$$

Dacă simultan a = 0 şi b = 0, avem $0 \cdot 0 = 0$

Concluzie: Dacă cel puţin unul din factorii unui produs este zero, produsul este nul.

Proprietăţi:

- **Asociativitatea**. Înmulţirea este asociativă, adică oricare ar fi numerele a, b, c, din **N,** este adevărată egalitatea: abc = (ab)c = a(bc).
- **Comutativitatea.** Înmulţirea este comutativă, adică pentru orice cuplu (a, b) de numere este adevărată egalitatea: ab = ba.
- **Element neutru**. În mulţimea numerelor naturale există un element notat 1, numit element unitate, cu proprietatea că pentru orice element a din N este adevărată egalitatea. Unitatea se numeşte element neutru pentru înmulţire pentru că orice număr înmulţit cu 1 rămâne neschimbat.
- **Distibutivitatea.** Înmulţirea este distributivă faţă de adunare, adică pentru orice triplet (a, b, c), de numere naturale sunt adevărate egalităţile:

- (a + b)c = ac + bc ;

- c(a + b) = ca + cb = ac + bc.

Se mai spune că înmulţirea numerelor naturale este distributivă faţă de adunare atât la dreapta, cât şi la stânga.

*Efectuarea unui produs de mai mulţi factori***.**

Pentru a efectua un produs de mai mulţi factori, se înmulţeşte primul factor cu al doilea, produsul obţinut se înmulţeşte cu factorul al treilea ş.a.m.d.

$$\text{abcde}=\langle[(ab)\cdot c]\cdot d\rangle\cdot e$$

În efectuarea unui produs de mai mulţi factori este indicat să se aplice proprietăţile de asociativitate şi comutativitate în scopul uşurării calculelor.

Înmulţirea unui produs cu un număr se face înmulţind cu acel număr unul din factorii produsului: $(ab)\cdot c=(ac)b=a(bc)$

În mod analog, înmulţirea unui număr cu un produs.

Înmulţirea unei sume de mai mulţi termeni cu un număr se face:

- efectuând suma şi apoi înmulţind cu numărul:

$$(a+b+c)\cdot n=sn \qquad cu \qquad a+b+c=s$$

Înmulţind fiecare termen al sumei cu acel număr şi însumând rezultatele:

$$(a + b + c) n = an + bn + cn$$

conform distributivităţii produsului faţă de sumă.

Înmulţirea unei diferenţe cu un număr.

Proprietatea de distributivitate a unui produs faţă de o sumă se aplică şi faţă de o diferenţă:

$$(a – b) c = ac – bc.$$

Motivare: Dacă a – b = d , adică a = b + d , atunci: (a – b)c = dc adică ac = $(b+d)c \Rightarrow ac=bc+dc \Rightarrow ac-bc=dc$

Deci înmulţirea unei diferenţe cu un număr se face:

- efectuând diferenţa şi apoi înmulţind cu numărul;
- înmultind fiecare termen al diferenţei cu acel număr şi apoi scăzând rezultatele.

Înmulţirea a două sume se face înmulţind fiecare termen al primei sume cu fiecare termen al sumei a doua şi însumând produsele:

$$(a + b + c) (d + e) = (a + b + c) d + (a + b + c) e =$$
$$ad + bd + cd + ae + be + ce$$

$$\text{sau } (a + b + c) (d + e) = a (d + e) + b (d + e) + c (d + e) =$$
$$ad + ae\ bd + be + cd + ce;$$

$$(a – b) (c – d) = ac – bc – ad + bd.$$

Regula generală pentru efectuarea produsului a două numere naturale se reduce la efecuarea produsului a două sume,deoarece orice număr se poate scrie sub forma de sumă a unităţilor componente:

$$\overline{abc}\cdot\overline{xy} = (100a+10b+c)(10x+y).$$

De aceea, atât oral, cât şi în scris, unităţile de ordin diferit ale înmulţitului se înmulţesc pe rând cu unităţile de ordin diferit ale înmulţitorului, apoi se adună produsele obţinute. Acesta este algoritmul înmulţirii numerelor naturale.

În rezolvarea problemelor, înmulţirea se utilizează:

- pentru a repeta un număr ca termen al adunării de un anumit număr de ori;
- pentru a găsi un număr care să fie de câteva ori sau de un număr de ori mai mare decât un număr dat; prin urmare mărirea de un număr de ori este echivalentă cu înmulţirea.

❖ *Împărţirea*

Operaţia de împarţire nu este lege de compoziţie definită în mulţimea numerelor naturale, întrucât nu oricărei perechi, (a, b) de elemente din ***N*** îi corespunde un al treilea element din ***N.*** Acest lucru devine posibil în următoarele cazuri:

(a) Deîmpărţitul divizibil prin împărţitor ceea ce se scrie : $b|a$ (*b* divide pe *a),* sau a = M*b* (*a* multiplu de *b*), împărţitorul fiind diferit de zero ($b\neq 0$). În acest caz împărţitorul se face fără rest, ca atare se numeşte *împaţire „exactă”* şi se defineşte astfel: A *imparţi un număr a, numit deîmpărţit, la un număr b ≠ 0, numit împărţitor, înseamnă a găsi un al treilea număr q, numit cât, care înmulţit cu împarţitorul să ne dea pe deîmpărţit:*

$a : b = q$ astfel încât $a = bq$

Împărţirea se mai scrie: $\frac{a}{b}$ sau $a \div b$.

Întrucât $a : b = q \Leftrightarrow a = bq,\ b \neq 0$, împărţire se defineşte ca o operaţie inversă înmulţirii, de unde rezultă posibilitatea verificării împarţirii prin înmulţire.

(b) Deîmpărţitul mai mare decât împărţitorul, fără să fie şi divizibil prin acesta, deci $a>b,\ a \neq \text{M}b \neq 0$. În acest caz împărţirea se face cu rest, ca atare se numeşte *împărţire cu rest.*

Teoremă. *(teorema împărţirii cu rest în **N**). Oricare ar fi numerele naturale a, b, b≠0, există două numere naturale q şi r, unice, cu r<b, astfel încât să satisfacă egalitatea:*

$$\boxed{a = bq+r}$$

Comparând cele două cazuri, se constată că împărţirea „exactă” constitue un caz particular al împărţirii cu rest şi anume cazul când restul este nul, adică relaţia $a = bq+r$, pentru $r = 0$, devine $a = bq$.

Numărul zero şi operaţia de împărţire. Dacă $a = 0,\ b \neq 0,$ avem: $0 : b = 0$ pentru că $0 = b \cdot 0$. Deci *împărţirea numărului zero la un număr diferit de zero are sens,* câtul fiind egal cu zero.

Dacă $a = b = 0$, avem $0 : 0 = k$, unde k este un număr natural oarecare, pentru că $0 = 0 \cdot k$. prin urmare, *operaţia* 0 **:** 0 *nu are sens,* întrucât rezultatul nu este unic, ci nedeterminat.

Dacă $a \neq 0$ şi $b = 0$, *împărţirea a:0 nu are sens* fiindcă egalitatea $a = 0 \cdot x$ nu este satisfăcută pentru nici o valoare a lui x є **N,** adică nu există nici un număr natural x care înmulţit cu zero să ne dea un număr natural $a \neq 0.$

Unitatea şi operaţia de împărţire. Dacă a $\in$ **N**, $a \neq 0$, $b = 1$, avem: $a : 1 = a$ pentru că $a = 1 \cdot a = a$, unitatea fiind element neutru pentru înmulţire.

Dacă $b = a$ avem**:** $a : a = 1$ pentru că $a = a \cdot 1$.

Dacă $a = 1$, $b \neq 0$, $b \neq 1$ avem $1 \cdot b$, caz imposibil în **N**.

Împărţirea unei sume sau diferenţe printr-un număr se face:

- prin efectuarea sumei sau diferenţei şi apoi împărţirea acesteia prin acel număr: $(a+b) : n$ dacă $s = a + b$,

  $(a - b) : n = d : n$ dacă $d = a - b$;

- prin împărţirea fiecărui termen al sumei sau diferenţei prin acel număr şi apoi adunarea sau scăderea câturilor obţinute:

$$(a + b + c) : n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n},\ n \neq 0,$$

$$(a - b) : n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n},\ n \neq 0$$

Motivare: Pe baza diferenţei impărţirii câtul $(a + b + c) : n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n}$ se poate scrie: $a + b + c = n \cdot (\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n})$ şi aplicând proprietatea de distributivitatea împarţirii faţă de adunare avem:

$n \cdot \frac{a}{n} + n \cdot \frac{b}{n} + n \cdot \frac{c}{n} = a + b + c$. Analog pentru relaţia a doua.

Împărţirea unui număr printr-o sumă sau printr-o diferenţă se face împărţind acel număr la suma sau diferenţa efectuată:

$a : (b + c + d) = a : s$ dacă $s = b + c + d$, $a : (b - c) = a : d$ dacă $d = b - c$.

Împărţirea unui produs printr-un număr se face împărţind unul din factorii produsului prin acel număr:

$$(abcd): n = \frac{a}{n} \cdot bcd = a \cdot \frac{b}{n} \cdot cd = ab \cdot \frac{c}{n} \cdot d = abc \cdot \frac{d}{n}.$$

Justificarea procedeului se face pe baza definiţiei împărţirii şi anume:

$$abcd : n = \frac{a}{n} \cdot bcd \text{ pentru ca } abcd = n \cdot \frac{a}{n} \cdot bcd = abcd$$

Analog pentru celelalte situaţii.

Împărţirea unui număr printr-un produs se face prin:

- împărţirea numărului la produsul efectuat:

$$m : (abcd) = m : p \text{ dacă } p = abcd;$$

-împărţirea numărului în mod succesiv prin fiecare factor al produsului, adică se împarte numărul prin primul factor al produsului, câtul obţinut se împarte prin al doilea factor, apoi noul cât prin al treilea factor ş.a.m.d.

$$m : (abcd) = \{[m : a) : c \} : d.$$

Justificarea celui de-al doilea procedeu se bazează pe primul, întrucât pentru a împărţi numărul *m* la produsul abcd înseamnă a micşora acel număr de *p* ori, dacă *p = abcd,* adică al micşora întâi de *a* ori, apoi de *b* ori, apoi de *c* ori şi in sfârşit de *d* ori.

Împărţirea unui produs printr-un alt produs se face prin:

- efectuarea produselor şi apoi împărţirea primului produs la cel de-al doilea:

$abcd : efg = p_1 : p_2$ daca $p_1 = abcd$ si $p_2 = efg;$

- împărţirea primului produs în mod succesiv prin fiecare din factorii produsului al doilea, potrivind factorii deîmpărţitului astfel încât să se divide cu factorii respectivi ai împărţitorului:

$$\text{abcd : efg} = \frac{a}{e} \cdot \frac{b}{f} \cdot \frac{c}{g} \cdot \text{d daca } a \vdots e;\ b \vdots f;\ c \vdots g$$

(semnul "$\vdots$" se citeste "*divizibil cu*").

Împărţirea unui număr printr-un cât se face prin:

1. împărţirea numărului la câtul deja efectuat:

$$m : (a : b) = m : q \text{ daca } q = a : b;$$

2.înmulţirea numărului cu împărţitorul şi împărţirea prin deîmpărţi a produsului obţinut:

$$m : (a:b) = ma : a, \text{ deoarece}$$

$$m : (a : b) = m : \frac{a}{b} = m \cdot \frac{b}{a} = \frac{mb}{a} = mb : a$$

sau $m : (a : b) = m : \frac{a}{b}$, apoi se înmultesc ambii termeni cu câtul neefectuat cu b, deci $mb: \frac{ab}{b} = mb:a$.

Într-un produs de doi factori, *unul din factori este egal cu câtul dintre produs şi celălalt factor.*

$$a \cdot b = p \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{p}{b}; \\ b = \frac{p}{a}. \end{cases}$$

Motivarea se face pe baza definiţiei împărţirii ,,exacte”.

Într-o împărţire ,,exactă’’, *deîmpărţitul* este egal cu produsul dintre împărţitor şi cât: $a:b=q \Rightarrow a=bq$

Într-o împărţire exactă, *împăţitorul* este egal cu deîmpărţitul împărţit la cât:

$$a:b=q \Rightarrow b=\frac{a}{q}.$$

Motivare; Din $a:b = q$ rezultă $a = bq$ conform definiţiei împărţirii, iar din produsul $bq = a$ rezultă $b = a/q$ conform proprietăţii de la punctul *a).*

Mărirea sau micşorarea unui factor al produsului de un număr de ori are drept consecinţa mărirea, respectiv micşorarea produsului de acelaşi număr de ori: $a \cdot b = p$,

$$(a \cdot n) \cdot b = pn \text{ si } a \cdot (b \cdot n) = pn;$$

$\frac{a}{n} \cdot b = \frac{p}{n}$ si $a \cdot \frac{b}{n} = \frac{p}{n}$, pentru că se aplică comutativitatea şi asociativitatea operaţiei de înmulţire.

Dacă într-un produs de doi factori *ambii factori se măresc* (*micşorează*) de acelaşi număr de ori, produsul se măreşte (*micşorează*) de acel număr de ori la pătrat:

$$ab=c;\ (an)\cdot(bn)=an\cdot bn=abn^2=cn^2$$

sau: $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{n^2} = \frac{c}{n^2}$.

Într-un produs de doi factori, dacă unul din factori se măreşte cu un număr, rezultatul se măreşte cu produsul dintre acel număr şi factorul al doilea:

$$a\cdot b=c$$

$$(a+n)\cdot b=ab+bn=c+bn$$

sau : $a\cdot(b+n)=ab+an=c+an$.

Mărirea sau micşorarea deîmpărţitului de un număr de ori are drept consecinţă *mărirea,* respectiv *micşorarea* câtului de acelaş număr de ori: $a : b = q$,

$(a\cdot n):b=qn$ si $\frac{a}{n} : b = \frac{q}{n}$.

Motivare: $(a\cdot n):b=\frac{an}{b} = \frac{a}{b} \cdot n = qn$,

$\frac{a}{n} : b = \frac{a}{nb} = \frac{a}{b} : n = \frac{q}{n}$.

Mărirea sau micşorarea împărţitului de un număr de ori are drept consecinţă *micşorarea,* respectiv *mărirea* câtului de acelaşi număr de ori:

$a : b = q$,

$a : (b \cdot n) = \frac{q}{n}$ si $a : \frac{b}{n} = qn$.

Motivare: $a:(b\cdot n)=\frac{a}{bn}=\frac{a}{b}:n=\frac{q}{n}$, $a:\frac{b}{n}=a\cdot\frac{n}{b}=\frac{an}{b}=\frac{a}{b}\cdot n=qn$.

Mărirea sau micşorarea ambilor termeni ai unui cât de acelaş număr de ori lasă acel cât neschimbat:

$a : b = q$, $(a\cdot n):(b\cdot n)=q$ si $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}=q$.

Motivare: $(a\cdot n):b=q\cdot n$ apoi: $(a\cdot n):(b\cdot n)=\frac{q\cdot n}{n}=q$;

$\frac{a}{n}:b=\frac{q}{n}$ apoi $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}=\frac{q}{n}\cdot n=q$.

În cazul *împăţtirii cu rest,* mărirea sau micşorarea deîmpărţitului şi a împărţitorului de acelaşi număr de ori lasă câtul neschimbat, însa restul se măreşte (micşorează) de acelaşi număr de ori:

$a = bq + r$,

$(a\cdot n) = (bq + r)\, n = bn\cdot q + rn$ conform distributivităţii înmulţirii faţă de adunare. $\frac{a}{n}=\frac{bq+r}{n}=\frac{b}{n}\cdot q+\frac{r}{n}$ onform regulii privitoare la împărţirea unei sume printr-un număr.

Observaţii: Micşorarea termenilor împărţirii şi a restului de un număr de ori se poate aplica numai dacă şi termenii şi restul sunt divizibili cu acel număr. Proprietatea menţionată mai sus trebuie avută în vedere la împărţirea a două numere, ambele divizibile cu un anumit număr, cu deosebire la micşorarea de 10^n ori a termenilor care au la urmă zerouri, ştiind că şi restul se micşorează de acelaş număr de ori:

Exemple:

În împărţirea 43587 : 63 avem $43587 = 63\cdot 691 + 54$.

Micşorînd ambii termeni şi restul de 9 ori, avem:

4843 : 7 ; $4843 = 7\cdot 691 + 6$.

Prin urmare, ar fi greşit să spunem că restul împărţirii 43587 : 63 este 6, întrucât adevăratul rest al acestei împărţiri este 54,care micşorat de 9 ori devine 6. Apoi:

109800 : 2300 → 109800 = 2300 · 47 + 1700;

1098 : 23 → 1098 = 23 · 47 + 17.

Prin urmare reducând împărţirea 109800 : 2300 la împărţirea 1098 : 23 se obţine acelaşi cât 47, dar restul adevărat nu este 17 ci 17 · 100 = 1700.

Împărţirea se utilizează în rezolvarea problemelor în următoarele cazuri:

În cazul *împărţirii în părţi egale***.** În acest caz, împărţitorul reprezintă numărul părţilor în care se grupează unităţile deîmpărţitului, iar câtul reprezintă mărimea sau valoarea unei singure părti, aceasta, fiind egală cu mărimea sau valoarea totală împărţită la numărul părţilor.

În cazul *împărţirii prin cuprindere***.** În acest caz, deîmpărţitul şi împărţitorul reprezintă mărimi de acelaş fel, iar câtul arată de câte ori împărţitorul se cuprinde în deîmpărţit, adicî numîrul părţilor se obţine împărţind valoarea totală la valoarea unei părţi.

Pentru *aflarea unie singure unităţi fracţionare* dintr-un întreg sau dintr-un număr, notat cu *1/n* din $a = \frac{a}{n}$.

Când se cere să se găsească *un număr care să fie de câteva ori* mai mic decât cel dat (micşorarea de un număr de ori este echivalentă cu împărţirea).

Când se cere să se afle *raportul de două numere,* adică să se afle de câte ori un număr este mai mare decât altul, operaţie cunoscută şi sub denumirea de *comparare prin cât.*

La aflarea unor termeni folosind relaţia de egalitate din teorema împărţirii cu rest în ***N*.**

❖ *Ridicarea la putere*

Definiţie. Operaţia de ridicare la putere în mulţimea numerelor naturale este un caz particular de înmulţire: *un număr natural înmulţit cu el însuşi de un anumit număr de ori.*

Fie a $\in$ ***N*** şi *n* $\in$ ***N***; vom scrie:

- daca $n > 1, a^n = \underbrace{a \cdot a ... a}_{n^{ori}};$

-daca $n = 1, a^1 = a;$

-daca $n = 0, a^0 = 1, a \neq 0$.

Numărul a^n *se numeşte putere, este unic determinat şi este natural; a* se numeşte *baza puterii* iar *n* se numeşte *exponentul puterii.*

Cazuri particulare: $1^n = 1$ si $0^n = 0$.

Reguli de calcul cu puteri cu exponent natural

1^0 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ **;**

2^0 $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0 \text{ si } m > n);$

3^0 $\left(a^m\right)^n = a^{mn};$

4^0 $\left(ab\right)^n = a^n b^n;$

5^0 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^{\,n}}{b^n};$

6^0 $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$ *(a > 0 şi b > 0).*

Observaţie:

Proprietatea (6) ne dă posibilitatea să demonstrăm relaţia de egalitate între două numere pozitive *a* şi *b*, demonstrând relaţia de egalitate între a^n şi b^n ceea ce ne va fi de folos la demonstrarea proprietăţilor radicalilor.

2.7. Exerciţii şi probleme

2.7.1. Enunţuri

1. a. Fie numerele naturale de 1 la 100. Determinaţi câte perechi cu aceeaşi sumă se pot forma cu aceste numere şi care este acea sumă.

b. Calculaţi suma primelor 60 de numere naturale nenule.

c. Cîte numere de patru cifre se termină cu două cifre identice şi câte încep cu două cifre identice?

2. Câte numere de forma $\overline{abc}$ satisfac egalitatea $\overline{abc}-\overline{cba}=297$.

3. Să se determine numerele de patru cifre distincte în baza 10, $\overline{abcd}$, ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

$\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{bc}$

b-c=d.

4. Să se găsească toate numerelescrise în baza 10 de forma $\overline{abc}$ cu

a>b>c

a-b-c=4.

5. Să se afle numerele naturale a, b, c, ştiind că

3c=a-b

5a+10b+12c=b(15+ac).

6. Găsiţi numerele de forma $\overline{ab},\overline{cd}$ care verifică egalitatea:

$\overline{ab}-\overline{cd}=a+b+c+d$.

7. Demonstraţi că numărul $\overline{abab}-\overline{baba}$ se divide cu 909.

2.8. Obiectivele predării-învăţării matematicii la ciclul primar

Subcapitolul de faţă îşi propune schematizarea organizării lecţiilor la nivelul claselor I – IV, urmărind să ofere alternative metodologice şi modele posibile de lucru, care să asigure optimizarea învăţământului matematic în ciclul primar. Cum predarea-învăţarea matematicii este o activitate cu dublă determinare, organizare ştiinţifică şi realizare eficientă, termenul de metodică nu trebuie înţeles ca o sumă de metode pe care le foloseşte învăţătorul în procesul de învăţământ. În acest sens, în locul termenului de metodică poate fi folosit cel de metodologie a didacticii matematicii, cu sensul de structură ştiinţifică şi normativă, care studiază demersurile de cunoaştere în domeniul respectiv. Reuşita asimilării şi aplicării metodologiei predării-învăţării matematicii la clasele I – IV este condiţionată de nivelul cunoaşterii matematicii şcolare, a fundamentelor acesteia, precum şi a psihopedagogiei procesului instructiv-educativ.

Obiectivele educaţionale sunt induse de idealul educaţional şi de finalităţile sistemului de învăţământ, care conturează, într-o etapă istorică dată, profilul de personalitate dorit la absolvenţii sistemului de învăţământ. Finalităţile sistemului se concretizează în finalităţile pe niveluri de şcolaritate (preşcolari, primar, gimnazial şi liceal), care descriu specificul fiecărui nivel de şcolaritate din perspectiva politicii educaţionale.

Finalităţile învăţământului primar sunt:

- asigurarea educaţiei elementare pentru toţi copiii;
- formarea personalităţii copilului respectând nivelul şi ritmul său de dezvoltare;

- înzestrarea copilului cu acele cunoştinţe, capacităţi şi atitudini care să stimuleze raportarea efectivă şi creativă la mediul social şi natural şi să permită continuarea educaţiei.

Curriculum-ul naţional realizează o periodizare a şcolarităţii prin gruparea mai multor niveluri de clase, care au în comun anumite obiective. Aceste cicluri curriculare au scopul de a evidenţia obiectivul major al fiecărei perioade şcolare şi de a regla procesul de învăţământ din acea perioadă. Astfel, s-a format ciclul achiziţiilor fundamentale, ce cuprinde copiii de 6-7 ani, aflaţi în grădiniţă şi în clasele I – II, ciclul de dezvoltare, cuprinzând copiii de 8-12 ani, corespunzător claselor II – VI şi ciclul de observare şi orientare, ce include copiii de 13-14 ani, din clasele a VII-a şi a VIII-a. La nivelul învăţământului primar, ciclul achiziţiilor fundamentale are ca obiective majore acomodarea la cerinţele sistemului şcolar şi alfabetizarea iniţială.

Acest ciclu urmăreşte:

- asimilarea elementelor de bază ale principalelor limbaje convenţionale (scris, citit, calcul);
- stimularea copilului în vederea perceperii, cunoaşterii şi adaptării la mediul apropiat;
- formarea motivării pentru învăţare.

Ciclul de dezvoltare are ca obiectiv major formarea capacităţilor de bază necesare pentru continuarea studiilor. Acest ciclu urmăreşte:

- dezvoltarea achiziţiilor lingvistice, a competenţelor de folosire a limbii române, a limbii materne şi a limbilor străine, pentru exprimarea corectă şi eficientă în situaţii variate de comunicare;
- dezvoltarea capacităţii de a comunica, folosind diferite limbaje specializate;

- dezvoltarea gândirii autonome şi a responsabilităţii faţă de integrarea în mediul social.

Studiul matematicii în ciclul primar urmăreşte ca toţi elevii să-şi formeze competenţele de bază vizând: numeraţia, calculul aritmetic, noţiuni intuitive de geometrie şi măsurarea mărimilor. În acest context, obiectivele cu cel mai mare grad de generalitate, numite **obiective cadru**, sunt:

1. cunoaşterea şi utilizarea conceptelor specifice matematicii;
2. dezvoltarea capacităţilor de explorare/investigare şi de rezolvare a problemelor;
3. formarea şi dezvoltarea capacităţii de a comunica utilizând limbajul matematic;
4. dezvoltarea interesului şi a motivaţiei pentru studiul şi aplicarea matematicii în contexte variate.

La nivelul fiecărei clase, aceste obiective sunt detaliate şi precizate prin **obiectivele de referinţă**. Astfel, la clasa I, primul obiectiv cadru se materializează în următorul set de obiective de referinţă, exprimate în termeni de capacităţi dorite la elevi:

1.1 să înţeleagă sistemul poziţional de formare a numerelor din zeci şi unităţi;

1.2 să scrie, să citească şi să compare numerele naturale de la 0 la 100;

1.3 să efectueze operaţii de adunare şi scădere în concentrul 0-30, fără trecere peste ordin;

Cel de-al doilea obiectiv cadru se regăseşte în următoarele obiective de referinţă:

2.1 să stabilească poziţii relative ale obiectelor în spaţiu;

2.2 să recunoască forme plane şi forme spaţiale, să sorteze şi să clasifice după formă, obiecte date;

2.3. să sesizeze asocierea dintre elementele a două categorii de obiecte, desene sau numere mai mici ca 20, pe baza unor criterii date, să continue modelele repetitive reprezentate prin obiecte, desene sau numere mai mici decât 10;

2.4. să se continue modelele repetitive reprezentate prin obiecte, desene sau numere mai mici decât 10;

2.5. să exploreze modalităţi de a descompune numere mai mici ca 30, în sumă sau diferenţă folosind obiecte, desene sau numere;

2.6. să rezolve probleme care presupun o singură operaţie dintre cele învăţate;

2.7. să compună oral exerciţii şi probleme cu numere de la 0 la 30.

2.8. să măsoare dimensiunile, capacitatea sau masa unor obiecte folosind unităţi de măsură nestandard aflate la îndemâna elevilor;

2.9. să recunoască orele fixe pe ceas;

2.10. să estimeze numărul de obiecte dintr-o mulţime şi să verifice prin numărare estimarea făcută;

Al treilea obiectiv cadru se reflectă în obiectivul de referinţă:

3.1. să verbalizeze în mod constant modalităţile de calcul folosite în rezolvarea unor probleme practice şi de calcul;

Cel de-al patrulea obiectiv cadru se regăseşte în obiectivele de referinţă:

4.1. să manifeste o atitudine pozitivă şi disponibilitate în a utilizarea numerelor;

4.2. să conştientizeze utilitatea matematicii în viaţa cotidiană.

Toate aceste obiective sunt valabile pentru curriculum-ul nucleu, trunchiul comun ce corespunde numărului minim de ore din planul de învăţământ.

2.8 1. Rolul şi conţinuturile matematicii şcolare

Scopul esenţial pe care îl urmăreşte învăţământul matematic nu se reduce la latura informativă, ci prin predarea acestei discipline se realizează mai ales dezvoltarea raţionamentului şi a spiritului de receptivitate, a deprinderilor de gândire logică, de definire clară şi precisă a noţiunilor de adaptare creatoare la cerinţele actuale.

Gândirea matematică se manifestă printr-o mare varietate de activităţi intelectuale legate de memorie şi imaginaţie şi anume: judecare, raţionare, înţelegere, explicare, invenţie, deducţie, inducţie, analogie, abstractizare, generalizare, comparaţie, concretizare, clasificare, diviziune, rezolvare de situaţii-problemă, etc.

Prin modernizare nu trebuie să se înţeleagă renunţarea la trecut, aşa cum arată academicianul Gheorghe Mihoc, ci *îmbinarea a ceea ce s-a dovedit valoros de-a lungul trecutului cu ceea ce se impune în condiţiile vieţii contemporane.*

Printr-o muncă de milenii, pornind de la adevărul simplu, a fost construită matematica modernă. Ea a cunoscut o evoluţie mai rapidă decât celelalte ştiinţe, datorită specificului ei. Este ştiinţa probei formale şi a demonstraţiei logice care întruchipează într-un grad înalt idealul de rigoare şi de construcţie logică.

În majoritatea ţărilor s-au întreprins şi se întreprind experimente care tind să dezvolte copilului încă de la început caracteristicile generale ale matematicii moderne. Raţionamentul matematic şi gândirea riguros ştiinţifică creează elevului posibilitatea de înţelegere a celorlalte discipline cât şi de pătrundere a problemelor privitoare la natură, viaţă, societate. De asemenea, se contribuie la formarea şi dezvoltarea capacităţii de a muncii organizat şi ritmic, a perspicacităţii, a spiritului de investigaţie.

Învăţământul matematic are ca rezultat formarea unor deprinderi şi capacităţi necesare în activitatea matematică şi care devin utile în activitatea practică a omului.

În primele patru clase ale şcolii generale, în cadrul cărora elevii dobândesc cunostinţe elementare de calcul numeric precum şi câteva noţiuni simple de geometrie, accentul principal se pune pe formarea conştientă a deprinderilor de calcul oral şi scris corect şi rapid cu utilizarea procedeelor raţionale de calcul.

Formarea deprinderilor de calcul este o sarcină fundamentală a învăţământului matematic. Ele reprezintă „instrumente” operaţionale utile pe întregul parcurs al învăţământului, stând la baza întregului sistem al deprinderilor matematice. Deprinderile de calcul (mintal şi scris) constituie deprinderi de bază pentru rezolvarea problemelor.

Calculul mintal are o importantă contribuţie la dezvoltarea gândirii, obiectivul final al învăţării calculului este dezvoltarea gândirii logice a elevilor. Supusă la un antrenament continuu prin efectuarea unor calcule exacte şi rapide, judicios gradate, gândirea elevului se dezvoltă şi se disciplinează. Dar elevul este pus în situaţia de a alege procedeul de calcul cel mai potrivit cazului dat pentru a afla mai repede şi mai uşor rezultatul, de a aplica în unele cazuri particulare principiul de rezolvare. În felul acesta se dezvoltă puterea de înţelegere, spiritul de iniţiativă, perspicacitatea.

La clasele I-IV, datorită lipsei de experienţă a copiilor şi plasticităţii sistemului lor nervos, putem vorbi de formarea deprinderilor elementare de calcul, care stau la baza întregului sistem al deprinderilor matematice, de înarmare cu „instrumente” operaţionale utile pe întregul parcurs al învăţământului matematic şi utile mai ales în viaţă.

Studiul matematicii în manieră modernă încă de la clasa I urmăreşte să ofere elevilor, la nivelul lor de înţelegere, posibilitatea explicării ştiinţifice a conceptului de număr natural şi a operaţiilor cu numere naturale.

Sistemul cunoştinţelor matematice formează în mintea elevilor o construcţie după modelul riguros logic al ştiinţei matematice. Acest model este caracterizat prin continuitate şi legătura logică, prin utilizarea raţionamentului deductiv şi inductiv în formarea conceptelor matematice.

În vederea dezvoltării gândirii logice a elevilor din ciclul primar se va desfăşura un învăţământ modern formativ, ceea ce presupune: înţelegerea noţiunilor de matematică de către elevi pe cât posibil prin efort personal, căutând să-i deprindem pe elevi să gândească matematic; să antrenăm gândirea elevilor prin rezolvarea în mod permanent de probleme; dezvoltarea spiritului de independenţă şi a încrederii în forţele proprii prin stimularea iniţiativei de a încerca rezolvări cât mai variate şi cât mai ingenioase prin e încerca rezolvări cât mai variate şi cât mai ingenioase prin extinderea muncii independente.

Pentru a putea realiza aceste sarcini, învăţătorul trebuie să aibă mereu în vedere următoarele: predarea să fie în aşa fel realizată, încât noţiunile însuşite să constituie suport pentru viitoarele cunoştinţe; utilizarea metodelor şi tehnicilor de lucru care să imprime actului învăţării un caracter activ, care să facă din elev un participant conştient la dobândirea cunostinţelor, priceperilor şi deprinderilor; abordarea creativă a materiei de către învăţător; să contribuie la însuşirea matematicii de către elevi mai uşor pentru ca să le permită să-şi organizeze experienţele în formele economice şi sistematice; legătura matematicii cu viaţa, să-i provocăm în permanenţă să gândească matematic punându-i în situaţia de a matematiza aspecte reale din viaţă.

Un rol important în dezvoltarea gândirii logice a elevilor îl are măiestria didactică a învăţătorului. Realizarea prin metode de lucru cu elevii a unei permanenţe gimnastici a minţii, introducerea în lecţiile de consolidare, recapitulare, sistematizare a unor elemente noi care să supună gândirea elevilor la un efort nou, rezolvarea exerciţiilor şi problemelor prin muncă independentă, să gândească matematic. Se impune aşadar dimensionarea matematicii la parametrii capacităţilor intelectuale ale copilului, ştiind că acum se naşte dragostea, repulsia sau indiferenţa pentru studiul acestui obiect. Dacă el simte că pătrunde în miezul noţiunilor matematice, dacă gândirea lui este stimulată în mod sistematic să se facă un efort gradat şi simte că în urma fiecărui „antrenament” se adaugă ceva în fiinţa lui, dacă el trăieşte bucuria fiecărui succes, mare sau mic, toate aceste trăiri cultivă interesul şi dragostea pentru studiul acestei discipline.

Specificul formării noţiunilor matematice în ciclul primar

Învăţământul preşcolar, prima verigă a sistemului nostru de învăţământ, are menirea de a asigura pregătirea copiilor pentru activitatea şcolară. Avand rol cu preponderenţă formativ, învăţământul preşcolar dezvoltă gandirea, inteligenta, spiritul de observaţie al copiilor, exersând operatiile de analiza, sinteza, comparative, abstractizare, generalizare in cadrul jocurilor logico matematice.

În gradinita copilul învată să formeze colecţii-mulţimi de obiecte; descoperă proprietăţile lor caracteristice, stabileşte relaţii între ele, efectuează operaţii cu ele. În cadrul jocurilor logico-matematice, copii sunt familiarizati cu unele notiuni elementare despre multimi si relatii. Facând exercitii de gândire logică pe multimi concrete, ei dobandesc gandirea necesara pentru întelegerea numarului natural si a operatiilor cu numere natural pe baza multimilor. In principiu acestea constau in exercitii de clasificare comparare si ordonare a multimilor de obiecte.

Prin activitatea cu conţinutul matematic (grupare ordonare, comparare, punere în corepondenţă), copii sunt antrenaţi în acţiuni operatorii cu diferite material (obiecte imagini schematice ale acestora si simboluri, cerc linie, punct etc.). Acestea constituie o bază reală prin care se realizează dezvoltarea intelectuală a copiilor de natură să optimizeze integrarea în clasa întăi, să asigure pregătirea lor pentru învăţarea matematicii moderne.

Fiecare disciplină care se studiază în şcoală are menirea de a "constitui" şi "reconstitui" logic şi progresiv în structurile mentale ale elevului un sistem de cunostinte care sa se apropie de logica stiintei respevctive.

Matematica este ştiinţa conceptelor cele mai abstracte, de o extremă generalitate. Logica didactică a învăţământului matematic are drept temei logica internă a ştiinţei matematice, dar se construieste tinand seama de particularitatile psihice ale celor care învaţă matematica.

Specificul gândirii copilului de vârstă şcolară mica (mai ales în primele calse) se manifesta printr-o prioritate esentiala, anume aceea de a fi concret intuitive. Aşa cum arată J Piaget, ne gasim în stadiul operaţiilor concrete. Copilul gândeste mai mult operând cu multimile concrete, în ciuda faptului ca principiile logice de o detaşare progresiva de baza concretă, iar operațiile cer interiorizarea în plan mental. Prioritate nu va avea atât studiul strict delimitat în care se găsesc elevii din punct de vedere al vârstei, cat mai ales zona proximei dezvoltari a capacitatilor intelectuale ale acestora.

Esential este, afirmă psihologii şi pedagogii, ca legitățile construcției psioho-genetice să fie cunoscute, iar formarea noilor operații mintale să pornească de la modele concrete. Latura perceptivă este o realitate pentru construirea conceptelor şi pentru formarea operativității matematice, aşa cum nevoia de exteriorizare sub forma unor actiuni materiale sau materializate fie cu obiecte, fie cu substitute ale acestora (modele, scheme grafice, bile, jetoane etc.) reprezintă baza reală a materializarii actului mintal.

Curriculum-ul nucleu prevede următoarele conţinuturi ale învăţării *la clasa I*:

- elemente pregătitoare pentru înţelegerea conceptului de număr natural;
- numere naturale de la 0 la 100: citire, scriere, comparare, adunare;
- adunarea şi scăderea numerelor naturale în concentrul 0-30, fără trecere peste ordin;
- figuri geometrice: triunghi, dreptunghi, pătrat, cerc;
- măsurări cu unităţi nestandard pentru lungime, capacitate, masă; măsurarea timpului (unităţi de măsură: ora, ziua, săptămâna, luna; recunoaşterea orelor fixe pe ceas)

La clasa a II-a sunt prevăzute următoarele noi conţinuturi ale învăţării:

- numere naturale până la 1000 (formare, scriere, citire, comparare, ordonare);
- adunarea şi scăderea numerelor naturale în concentrul 0-100, fără şi cu trecere peste ordin; *înmulţirea numerelor naturale în concentrul 0-50; împărţirea dedusă din tabla înmulţirii* (se transferă în clasa a III-a începând cu anul şcolar 2004-2005);
- elemente intuitive de geometrie: punct, segment, linie dreaptă, linie frântă, linie curbă; interiorul şi exteriorul unei figuri geometrice; exerciţii de observare a obiectelor cu formă de paralelipiped dreptunghic;
- măsurarea mărimilor şi unităţilor de măsură pentru lungime (metrul), capacitate (litrul), masă (kilogramul), timp (minutul); monede; utilizarea instrumentelor de măsură adecvate: metrul, rigla gradată, cântarul, balanţa;

Clasa a III-a are următoarele noi conţinuturi ale învăţării:

- numere naturale până la 1000000;

- adunarea şi scăderea numerelor naturale în concentrul 0-1000; înmulţirea numerelor naturale în concentrul 0-100; împărţirea (inclusiv cea cu rest) în acelaşi concentru; ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor rotunde;
- elemente intuitive de geometrie: poligon; exerciţii de observare a obiectelor cu forme de cilindru sau de con;
- măsurarea mărimilor şi a unităţilor de măsură pentru lungime (multiplii şi submultiplii metrului), capacitate (multiplii şi submultiplii litrului), masă (multiplii şi submultiplii kilogramului), timp (anul), monede şi bacnote.

În clasa a IV-a sunt următoarele noi conţinuturi ale învăţării:

- numere naturale: clase (unităţi, mii, milioane, miliarde); caracteristicile sistemului de numeraţie folosit (zecimal şi poziţional); scrierea cu cifre romane;
- adunarea şi scăderea numerelor naturale fără şi cu trecere peste ordin; înmulţirea când un factor are cel mult două cifre sau este 10, 100, 1000; împărţirea la un număr de o cifră (diferenţă de 0) sau la 10, 100, 1000 (a numerelor a căror scriere se termină cu cel puţin unul, două sau trei zerouri); ordinea efectuării operaţiilor şi folosirea parantezelor;
- fracţii: noţiunea de fracţie; fracţii egale, reprezentări prin desene; fracţii echiunitare, subunitare, supraunitare; compararea fracţiilor; adunarea şi scăderea fracţiilor cu acelaşi numitor; aflarea unei fracţii dintr-un întreg;
- elemente intuitive de geometrie: unghi, drepte paralele; rombul; perimetrul (dreptunghiului şi pătratului); aria;

- măsurarea mărimilor şi unităţi de măsură, cu transformări ale multiplilor şi submultiplilor unităţilor principale pentru lungime, capacitate, masă; unităţi de măsură pentru timp (deceniul, secolul, mileniul); monede şi bancnote.